تصحيح الإمتحان الوطني 2014

الرياضيـــــــــــات

عناصر الإجابة :

تمريـــن 1 : (3 نقط)

1) أ) لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & -1 & 0\\ \vec{j} & 0 & 2\\ \vec{k} & -1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

بما أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن A و B و C نقط غير مستقيمية

ب) لدينا (ABC) هو المستوى المار من A والمتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية له .

إذن $M(x;y;z)\in(ABC)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y-3\\z-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=0$$

$$2x-y-2z+5=0$$

(أو النقط A و B و C تحقق المعادلة $2x-y-2z+5=0$ إذن هي معادلة المستوى (ABC))

2) أ) لدينا : $x^2+y^2+z^2-4x-5=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+z^2=9=3^2$

إذن : (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(2;0;0)$ وشعاعها R = 3

ب) لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2\times2-0-0+5|}{\sqrt{4+1+4}}=3$ إذن : (ABC) مماس للفلكة (S)

ج) لدينا $H(c,b,a)$ المسقط العمودي لـ Ω على (ABC) إذن H هي تقاطع (ABC) والمستقيم المار من Ω و العمودي على (ABC)

إذن : $\exists t\in\mathbb{R}/a=2+2t\ ;b=-t\ ;c=-2t$ و $2a-b-2c+5=0 \Leftrightarrow t=-1$

إذن $H(0;1;2)$.

تمريـــــن 2 : (3نقطة)

1) لدينا : (لأن : $z^2-\sqrt{2}z = (z-\frac{\sqrt{2}}{2})^2-\frac{1}{2}$)

$$z^2-\sqrt{2}z+2=0 \Leftrightarrow (z-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{3}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i \text{ أو } z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

وبالتالي $S=\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i \ , \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\}$

2) أ- لدينا : $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ومنه $|u|=\sqrt{2}$; $\arg u\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

ب- لدينا : $u=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow u^6=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]^6\Rightarrow u^6=\left[\left(\sqrt{2}\right)^6;\frac{6\pi}{3}\right]\Rightarrow u^6=[16;2\pi]\Rightarrow u^6=16$

ومنه $u^6\in\mathbb{R}$

3) أ- $R(O,\frac{\pi}{3})[z)M=[(z)M') \Leftrightarrow z-'z_O=(z-z_O)\times e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow \quad z='z\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

ب- لدينا: $z_A\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\left(4-4\sqrt{3}i\right)\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$$=\left(4\times\frac{1}{2}+4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$=8=z_B$$

ومنه : $R(O,\frac{\pi}{3})[B=[A$

لدينا: $R(O,\frac{\pi}{3})[B=[A\Rightarrow\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$

إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

تمريـــــن 3 : (3 نقطة)

1) من أجل n=0 لدينا : $U_0=13$ و $13<14$ إذن الخاصية تتحقق

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $U_n<14$ لنبين أن $U_{n+1}<14$

لدينا $U_n<14\Rightarrow\frac{1}{2}U_n+7<\frac{14}{2}+7$

$$\Rightarrow U_{n+1}<14$$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}:U_n<14$

2) أ- لدينا :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}: V_{n+1} &= 14-U_{n+1}\\ &= 14-\frac{1}{2}U_n-7\\ &= 7-\frac{1}{2}U_n\\ &= \frac{1}{2}\left(14-U_n\right)=\frac{1}{2}V_n\end{aligned}$$

إذن (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0=1$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}: V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب- لدينا :

$$\forall n\in\mathbb{N}: V_n=14-U_n \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: U_n=14-V_n$$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: U_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

و بما أن : $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ و بالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=14$

جـ- لدينا :

$$U_n>13.99 \Leftrightarrow 14-\left(\frac{1}{2}\right)^n>13.99 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n<14-13.99$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n<\ln(0.01) \Leftrightarrow -n\ln2<-2\ln10 \Leftrightarrow n>\frac{2\ln10}{\ln2}$$

ولدينا : $\frac{2\ln10}{\ln2}\simeq 6.67$ إذن $n=7$.

تمرين 4 : (3 نقطة)

1) كل إمكانية عبارة عن تأليفة لعنصرين من بين تسع عناصر وعددها هو $C_9^2=36$

لدينا "A" $\underbrace{10}$ " إذن $p(A)=\frac{C_4^1\times C_5^1}{C_9^2}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

2) أ- نعتبر الحدث " يفوز سعيد "G إذن " $\underbrace{11}$ " G ومنه $p(G)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

ب- نعتبر الحدث " يفوز سعيد مرتين بالضبط "B إذن " 3 حالات $\longleftarrow$ $\underbrace{G/G/\overline{G}}$ " B

ومنه : $p(B)=C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{72}$

مســـــألة: (8 نقطة)

الجزء الأول:

1) لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}_+^* : g'(x)=\frac{2x}{x^4}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}$

وبما أن : $x>0$ فإن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* : g'(x)>0$ ومنه g تزايدية تماما على $\mathbb{R}_+^*$

2) لدينا $g(1)=1-1+\ln 1=0$ وحيث أن g تزايدية على $\mathbb{R}_+^*$ فإن :

$$0<x\le 1\Rightarrow g(x)\le g(1)\Rightarrow g(x)\le 0 \quad \text{و} \quad x\ge 1\Rightarrow g(x)\ge g(1)\Rightarrow g(x)\ge 0$$

إذن :

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني: **1)** لدينا : $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ و $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

إذن : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و منه (ζ) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

2) أ) لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+\ln\left(t^2\right)\right)^2}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1+2\ln\left(t^2\right)+\left(\ln\left(t^2\right)\right)^2}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1+4\ln(t)+4(\ln(t))^2}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}+4\frac{\ln(t)}{t^2}+4\frac{(\ln(t))^2}{t^2}\right)$$

وبما أن : $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}=0$ و $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}=0$ و $\lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln(t))^2}{t^2}=0$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(1+\ln x)^2}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)=0$

ج- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ إذن (ζ_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

3) أ- لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}_+^* : f'(x)=\dfrac{2(1+\ln x)}{x}-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2}{x}\left(1+\ln x-\dfrac{2}{x^2}\right)$

$$=\frac{2g(x)}{x}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

ولدينا :

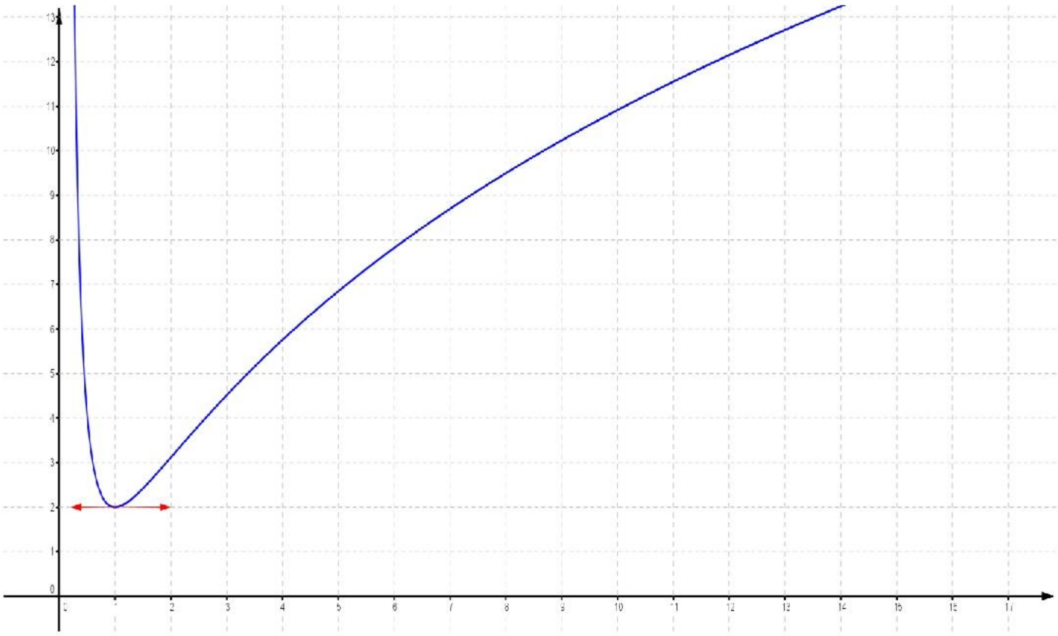
x	0		1		$+\infty$
إشارة g(x)		-	0	+	

ب- لدينا :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$-\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا 2 قيمة دنيا مطلقة للدالة f إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* : f(x)\geq 2$

4) إنشاء (ζ_f) :



5) أ) لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \; \mathbf{H'(x) = \ln x + 1}$

إذن : $I = \int_1^e (1+\ln x)dx = \mathbf{H(e) - H(1)} = \mathbf{e}$

ب) نضع : $\begin{cases} u(x) = (1+\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{2(1+\ln x)}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

إذن : $J = \left[x(1+\ln x)^2 \right]_1^e - 2\int_1^e (1+\ln x)dx$

$\mathbf{= 4e - 1 - 2e = 2e - 1}$

ج) لدينا : $A(f) = \int_1^e |f(x)|dx \times 1cm^2 = (J - \left[\dfrac{1}{x}\right]_1^e) cm^2 = \dfrac{2e^2 - 1}{e} cm^2$