تصحيح الرياضيات 2016 الدورة العادية

الأستاذ : الوظيفي

التمرين الأول :

1) ليكن n من $\mathbb{N}$:

لدينا $u_{n+1}-3=\dfrac{3+u_n}{5-u_n}-3$

$$=\frac{3+u_n-15+3u_n}{5-u_n}$$

$$=\frac{4u_n-12}{5-u_n}$$

$$=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$$

و منه $u_{n+1}-3=\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$

* بين أن $u_n<3$ لكل n من $\mathbb{N}$

← من أجل $n=0$ لدينا $u_0<3$ لأن $u_0=2$

← ليكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن $u_n<3$ و لنبين أن $u_{n+1}<3$

لدينا $u_{n+1}-3=\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$

و بما أن $u_n<3$ فإن $u_n-3<0$

بالتالي : $2(u_n-3)<0$

و بما أن $u_n<3$ فإن $0<3-u_n$

و بالتالي $0<2+(3-u_n)$

و منه $\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}<0$ أي $u_{n+1}-3<0$

أي $u_{n+1}<3$

← و بالتالي : $u_n < 3$ لكل n من $\mathbb{N}$

2)- أ-

ليكن n من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{3 - u_{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{3 + u_n}{5 - u_n} - 1}{3 - \frac{3 + u_n}{5 - u_n}}$$

$$= \frac{3 + u_n - 5 + u_n}{15 - 3u_n - 3 - u_n}$$

$$= \frac{2u_n - 2}{-4u_n + 12}$$

$$= \frac{2}{4} . \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$$

إذن $v_{n+1} = \frac{1}{2} . v_n$

و منه v_n متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

استنتاج : بما أن (v_n) هندسية أساسها 1/2

فإن $v_n = v_0 (\frac{1}{2})^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و لدينا : $v_n = \frac{u_0 - 1}{3 - u_0} = 1$

إذن $v_n = (\frac{1}{2})^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

2)- ب-

ليكن n من $\mathbb{N}$:

لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$

إذن $3v_n - v_n u_n = u_n - 1$

بالتالي : $\mathbf{u_n + v_n u_n = 3v_n + 1}$

$$u_n(1 + v_n) = 3v_n + 1$$

و منه $u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

* نكتب u_n بدلالة n :

لدينا : $u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ و $v_n = (\dfrac{1}{2})^n$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = \dfrac{1 + 3(\frac{1}{2})^n}{1 + (\frac{1}{2})^n}$

2)- ج-

بما أن $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ فأن $lim\ (\dfrac{1}{2})^n = 0$

$$lim\ u_n = 1$$

التمرين 2:

1)- أ-

لدينا $\overrightarrow{AB}(1; 0; -1)$

و $\overrightarrow{AC}(0; 1; -2)$

إذن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$

و منه $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

1)- ب-

لدينا $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على (ABC)

إذن معادلة المستوى* (ABC) *تكتب على شكل:

$$2x + 2y + z + d = 0$$

حيث d عدد حقيقي نحدد 0.

و لدينا : $A \in (ABC)$ إذن $4+2+3+d=0$

أي $d=-9$

و منه : معادلة (ABC) هي : $2x+2y+z-9=0$

2)- أ-

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

لدينا $M \in (S) \leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2+2y)+z^2=34$

$$\leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+1)^2-1+z^2=34$$

$$\leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=36$$

و منه مركز (S) هو $\omega(1,-1,0)$ و شعاعها هو 6

2)- ب-

$$d(\omega,(ABC))=\frac{|2*1+2(-1)+0-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$$

بما أن $d(\omega,(ABC))<6$

فإن (ABC) يقطع (S) وفق دائرة (r)

3)- أ-

لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على (ABC)

بما أن (Δ) عمودية على (ABC)

فأن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ موجهة للمستقيم (Δ)

و لدينا $\omega \in (\Delta)$

إذن تمثيل باراميتري ل (Δ) هو :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

3)- ب- مركز الدائرة (r) هو المسقط العمودي للنقطة ω على المستوى (ABC) أي نقطة تقاطع (ABC) و (Δ)

بتعويض إحداثيات B في التمثيل الباراميتري للمستقيم (Δ) نجد :

$$t = 1 \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ 1 = -1 + 2t \\ 1 = t \end{cases}$$

و هذا يعني أن $B \in (\Delta)$

و لدينا $B \in (ABC)$

إذن B هي نقطة تقاطع (Δ) و (ABC)

و منه B مركز $(\boldsymbol{r})$

ملاحظة : يمكن تحديد مركز الدائرة (r) على النظمة :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad 2x + 2y + z - 9 = 0$$

التمرين الثالث :

1)مميز المعادلة هو :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 * 1 * 29 = -100$$

إذن للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما :

$$z_1 = \frac{4 - i\sqrt{100}}{2} = 2 - 5i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = 2 + 5i$$

إذن $S = \{2 - 5i , 2 + 5i\}$

2)- أ-

$$u = b - \omega$$

$$= 5 + 8i - 2 + 5i$$
$$= 3 + 3i$$

* لدينا $|u| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

إذن $u = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= 3\sqrt{2}\left(\frac{\cos\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

و منه $\arg(u) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

2)- ب- بما أن $\overline{u}$ مرافق u

فإن $$arg(\overline{u}) \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

2)- ج –

$$a-\omega = (5+2i)-(2+5i)$$
$$= 3-3i$$
$$= \overline{u}$$

لدينا $$\omega A = |a-\omega| = |u|$$

و $$\omega B = |b-\omega| = |\overline{u}| = |u|$$

إذن $$\omega A = \omega B$$

$$arg\frac{b-\omega}{a-\omega} \equiv arg\left(\frac{u}{\overline{u}}\right) \quad [2\pi]$$

$$arg\left(\frac{u}{\overline{u}}\right) \equiv arg\,(u) - arg(\overline{u})[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

إذن $$arg\,\frac{b-\omega}{a-\omega} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

2)- د – لدينا:

$$\begin{cases} \omega A = \omega B \\ arg\,\dfrac{b-\omega}{a-\omega} \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

إذن $$\begin{cases} \omega A = \omega B \\ \overline{(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B})} \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

و بالتالي صورة A بالدوران R

الذي مركزه ω و زاويته هي B

التمرين الرابع:

4R 6V

1) نسحب في آن واحد :

إذن كل نتيجة للتجربة هي تألفيه لعنصرين من بين 10 عناصر

و منه $card\ \omega = C_{10}^2 = \frac{10*9}{2*1} = 45$

الحدث A يعني سحب كرتين حمراوين

إذن $card\ A = C_4^2 = \frac{4*3}{2*1} = 6$

و منه $P(A) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

2)- أ –

قيم X هي 2 عند سحب كرتين حمراوين .

3 عند سحب كرة حمراء و كرة خضراء

4 عند سحب كرتين خضراوين

و منه مجموعة قيم X هي {2, 3,4} .

2)- ب-

الحدث {X=3} يعني سحب كرة حمراء و كرة خضراء .

إذن $card\ (X=3) = C_4^1 . C_6^1 = 24$

و منه $P(X=3) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

$$P(X=2) = P(A) = \frac{2}{15}$$

$$P(X=4) = \frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45} = \frac{5}{15}$$

قانون احتمال X هو :

x_i	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15}$

مسألة:

1)- أ - $\lim_{x\to-\infty} f = \lim_{x\to-\infty}(2x-2+e^x(e^x-4)) = -\infty$

لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

1)- ب-

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-4e^x\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^x(e^x - 4) = 0$$

إذن المستقيم $(\Delta): y = 2x - 2$ مقارب ل Cf بجوار $-\infty$

2)- أ –

$$\lim_{x \to +\infty} f = \lim_{x \to +\infty} \left(2x - 2 + e^x(e^x - 4)\right) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2)- ب –

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{e^x}{x}(e^x - 4)\right) = +\infty$$

هندسيا Cf يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$

3)- أ - لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x) = 2 + 2e^{2x} - 4e^x = 2\left(e^{2x} - 2e^x + 1\right)$$

$$= 2(e^x - 1)^2$$

3) – ب - لدينا $f'(x) \geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3)- ج – الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على $[1; ln4]$ $f(1) * f(ln4) = \cdots < 0$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]1; ln4[$ حسب مبرهنة القيم الوسطية $f(\alpha) = 0$

و منه يوجد α من $]1; ln4[$ حيث $f(\alpha) = 0$

4)- أ – ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا:

$$f(x) - (2x - 2) = e^{2x} - 4e^{x}$$
$$= e^{x}(e^{x} - 4)$$

لدينا $0 < e^{x}$

إذن إشارة $f(x) - (2x - 2)$ هي إشارة $e^{x} - 4$

$$e^{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} e^{x} = 4 \\ x = ln4 \end{matrix} \qquad e^{x} - 4 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 0 \\ \Leftrightarrow x > ln4$$

و منه $]ln4, +\infty[\quad x \quad f(x) - (2x - 2) > 0$

و $]-\infty, ln4[\quad x \quad f(x) - (2x - 2) < 0$

و بالتالي Cf يوجد فوق (D) على $]ln4; +\infty[$

و Cf يوجد تحت (D) على $]-\infty; ln4[$

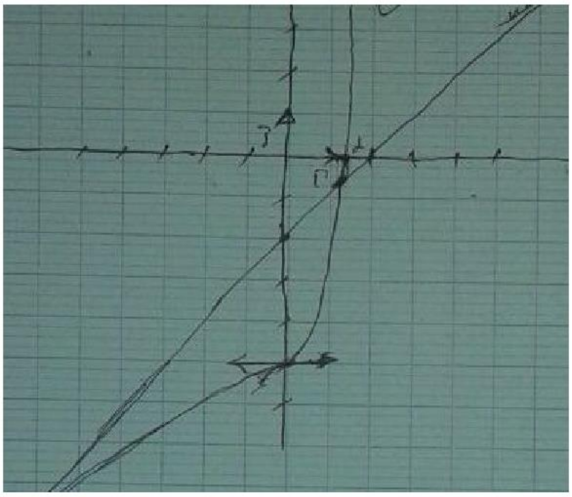
4)- ب- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f''(x) = 4(e^{x} - 1)e^{x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} e^{x} - 1 > 0 \\ x > 0 \end{matrix}$$

بما أن f'' تنعدم في 0 مع تغيير إشارتها فإن $I(0, -5)$ نقطة انعطاف Cf

4)-ج- إنشاء Cf:



5)- أ –

$$\int_0^{ln4}\left(e^{2x}-4e^x\right)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-4e^x\right]_0^{ln4}$$

$$=\left(\frac{e^{2ln4}}{2}-4e^{ln4}\right)-\left(\frac{1}{2}-4\right)$$

$$=(8-16)+\frac{7}{2}$$

$$=-8+\frac{7}{2}=-\frac{9}{2}$$

5)- ب – المساحة هي:

$$S=\int_0^{ln4}|f(x)-(2x-2)|\ dx \qquad ua$$

$$=\int_0^{ln4}\left|e^{2x}-4e^x\right|\ dx \quad *1cm^2$$

و لدينا $0\le x\le ln4$ إذن $1\le e^x\le 4$

أي $e^x-4\le 0$ و بالتالي $e^x(e^x-4)\le 0$

و منه :

$$S=\int_0^{ln4}\left(4e^x-e^{2x}\right)\ dx \quad .\,cm^2$$

$$=-\int_0^{ln4}e^{2x}-4e^x\ \ dx \quad .\,cm^2$$

3-أ- نعتبر المعادلة المميزة ب E هي :

$$r^2-3r+2=0$$

$$\Delta=(-3)^2-4*1*2=1$$

إذن

$$r_1=\frac{3-1}{2}=1$$
$$r_2=\frac{3+1}{2}=2$$

و منه حلول (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ – بما يلي

$$x\mapsto\ \alpha e^x+\beta e^{2x}$$

مع α و β من $\mathbb{R}$

1)- ب- لدينا g حل المعادلة (E):

$$\left(\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right)(\forall x\in\mathbb{R})\,;\, g(x)=\alpha e^x+\beta e^{2x}$$

و لدينا $\qquad \forall x\in\mathbb{R}\ ,\qquad g'(x)=\alpha e^x+2\beta e^{2x}$

إذن $\qquad \mathrm{g}'^{(0)}=\alpha+2\beta \qquad$ و $\qquad \mathrm{g}(0)=\alpha+\beta$

و منه $\qquad \begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ \alpha+2\beta=-2\end{cases} \qquad$ أي $\qquad \begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=1\end{cases}$

و بالتالي $\qquad \forall x\in\mathbb{R}\,;\quad g(x)=-4e^x+e^{2x}$

2)

الدالة $x\longmapsto e^{2x}-4e^x$ قابلة الاشتقاق على $]ln4;+\infty[$ و $\forall x\in\,]ln4,+\infty[\ ;\ e^{2x}-4e^x>0$

إذن الدالة $\qquad x\longmapsto ln\left(e^{2x}-4e^x\right)$

و $\qquad \forall x>ln4\quad;\quad h'(x)=\dfrac{2e^{2x}-4e^x}{e^{2x}+4e^x}$

$$=\frac{2(\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-2)}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-4}$$

بما أن $x>ln4$ فإن $\qquad \begin{cases}e^2-2>2\\ e^x-4>0\end{cases}$

و منه h تزايدية قطعا على $]ln4;+\infty[$

و لدينا h متصلة على $]ln4;+\infty[$ لأنها قابلة للاشتقاق عليه

إذن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على المجال J حيث :

$$J=h(]ln4;+\infty[)=\left]\lim_{x\to ln4^+}g(x)\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}g(x)\right[$$

نضع $\qquad t=e^{2x}-4e^x$

و لدينا $\qquad (x\to(ln4)^+)\ \Rightarrow\ (t\to 0^+)$

إذن $\qquad \lim_{x\to ln4^+}\mathrm{f(x)}=\lim_{\mathrm{t}\to 0^+}\mathrm{lnt}=-\infty$

و لدينا $\qquad \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\mathrm{e^x}(\mathrm{e^x}-4)\right)=+\infty$

$$J=\,]-\infty;+\infty[$$

2)- ب – لدينا :

$$h(ln5) = ln\left(e^{2ln5} - 4e^{ln5}\right)$$

$$= ln(25 - 20) = ln5$$

$$\left(h^{-1}\right)'(ln(5)) = \frac{1}{h'\left(h^{-1}(ln5)\right)} = \frac{1}{h'(ln5)}$$

و لدينا $h'(ln5) = 2(e^{ln5} - 1)^2 = 32$ و منه $\left(h^{-1}\right)(ln5) = \frac{1}{32}$