مادة الرياضيات مسلك العلوم الرياضية أ و ب المعامل 10 مدة الإنجاز : أربع ساعات	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات	الامتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا الدورة العادية 2007

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

(I) ليكن $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2 نضع : $a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$

0,25 ن ① ⓐ تحقق أن لكل زوج (a,b) من $\mathbb{E}^2$: $a\perp b=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$

0,25 ن ⓑ استنتج ان $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

0,50 ن ② بين أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية .

(II) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها : $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

و نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن F مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل : $\mathrm{M(a)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-\mathrm{a}&\mathrm{a}\\\mathrm{a}&\sqrt{2}-\mathrm{a}\end{pmatrix}$; $\mathrm{a}\epsilon\mathrm{E}$

0,50 ن ① ⓐ نضع : $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ تحقق أن : $A^2=-2A$ و أن : $M(a)=1+\frac{a}{\sqrt{2}}A$.

0,50 ن ⓑ بين أن F جزء مستقر من : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

② نعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned}\varphi:\ (\mathrm{E},\perp)&\longrightarrow(\mathrm{F},\times)\\\mathrm{a}&\longrightarrow\varphi(\mathrm{a})=\mathrm{M(a)}\end{aligned}$$

0,50 ن ⓐ بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي .

0,50 ن ⓑ استنتج بنية $(F,\times)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين i و $-i$

0,25 ن (I) ① ⓐ تحقق أن العدد العقدي $u=a+i$ حل للمعادلة $(E):\ z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$.

0,25 ن ⓑ حدد v الحل الثاني للمعادلة (E) .

② نفترض أن $|a|=1$.

0,25 ن ⓐ بين أن : $\frac{u}{v}\,\epsilon\,\mathbb{R}$

0,25 ن ⓑ تحقق أن : $u^2=a[(a-\bar{a})+2i]$

0,50 ن ⓒ استنتج أن : $arg(u)=\frac{1}{2}arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$

0,50 ن ③ بين أن $|u|+|v|\geq 2$

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O},\vec{e_1},\vec{e_2})$.
ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 . و (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث :
$|u| + |v| = m$

0,50 ن ① بين أن (E_m) إهليلج مركزه أصل المعلم $\mathcal{O}$.

② نضع : $a = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان .

0,25 ن (أ) بين أن : $x^2 + \left(1 - \dfrac{4}{m^2}\right)y^2 = \dfrac{m^2}{4} - 1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) .

0,25 ن (ب) أنشىء الإهليلج (E_4) .

0,50 ن ③ نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ رَأْسَيْ الإهليلج (E_4) . بين أن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر المعادلة : $(E)\ :\ 195x - 232y = 1$.

0,50 ن ① (أ) حدد $132 \wedge 195$.

0,50 ن (ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $\mathcal{S} = \{(163 + 232k\,;137 + 195k)\ \ ;\ \ k\epsilon\mathbb{Z}\ \}$

0,25 ن (ج) أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0 \le d \le 232$ و $195d \equiv 1[232]$.

0,25 ن ② بين أن العدد 233 عدد أولي.

③ لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 . نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{195} على 233.
نقبل أن : $a^{232} \equiv 1[233]\ \ :\ \ \forall a\epsilon A \setminus \{0\}$.

0,50 ن (أ) بين أن لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن : $a = b$.

0,50 ن (ب) ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a) = b$. حدد a بدلالة b .

0,50 ن (ج) استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

التمرين الرابع : (10,5 ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = 1 + (x-1)e^x$.

0,50 ن (I) ① بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \ge 0$.

0,25 ن ② بين أن $x = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة : $g(x) = 0$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1} & ;\ \forall x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن ① أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + x)$

0,25 ن ② بين أن الدالة f متصلة في 0.

0,50 ن ③ (أ) أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$.

0,25 ن (ب) إستنتج تغيرات الدالة f .

④ نعتبر التكامل : $J(x) = \int_0^x te^{-t}dt$ حيث x عدد حقيقي .

0,50 ن (أ) باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$.

1,00 ن (ب) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\dfrac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \le J(x) \le \dfrac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$

0,50 ن	ج	بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{1}{2}e^{\frac{x-\lvert x\rvert}{2}} \leq \frac{e^x-1-x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+\lvert x\rvert}{2}}$
0,75 ن	د	استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0) = \frac{-1}{2}$.
0,50 ن	5 أ	بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)}(e^x(x-1)+2+x)$
0,50 ن	ب	أدرس إشارة $e^x(x-2)+2+x$ لكل x من $\mathbb{R}$.
0,25 ن	ج	استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) > 0$.
0,50 ن	د	أنشىء $(\mathscr{C})$
	(III)	نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$
0,25 ن	1	بين أن $x = \ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$
0,50 ن	2 أ	بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\lvert f'(x)\rvert \leq \frac{1}{2}$.
0,50 ن	ب	بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $\lvert u_{n+1} - \ln 2\rvert \leq \frac{1}{2}\lvert u_n - \ln 2\rvert$
0,50 ن	ج	استنتج أن المتتالية : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.
	(IV)	لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t-1}dt \ ; \ \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$
0,50 ن	1 أ	بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x}-1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x-1}$
0,25 ن	ب	بين أن الدالة F متصلة في 0.
0,50 ن	ج	بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق في 0 وأن : $F'(0) = 1$.
0,50 ن	2 أ	بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $F'(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$
0,25 ن	ب	أدرس تغيرات الدالة F .