المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية
و التعليم العالي
و تكوين الأطر
و البحث العلمي

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010

المادة :	الرياضيات	المعامل :	9
الشعبة :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	مدة الانجاز :	4 ساعات

التمرين الأول : (3,5 نقط) الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما.

I. نزود المجموعة $I =]0,+\infty[$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$\left(\forall (a,b) \in I \times I\right) \; ; \; a*b = e^{\ln(a).\ln(b)}$$

0,5	1. بين أن القانون $*$ تبادلي وتجميعي في I.
0,25	2. بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا ε في I يتم تحديده.
0,75	3. أ- بين أن $\left(I \setminus \{1\},*\right)$ زمرة تبادلية. ($I \setminus \{1\}$ هي المجموعة I محرومة من 1)
0,25	ب- بين أن $]1,+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $\left(I \setminus \{1\},*\right)$.
	4. نزود I بقانون التركيب الداخلي $\times$. ($\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$)
0,25	أ- بين أن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $\times$.
0,5	ب- بين أن $\left(I,\times,*\right)$ جسم تبادلي.

II. نعتبر المصفوفة : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

0,5	1. أحسب A^2 و A^3.
0,5	2. استنتج أن المصفوفة A لا تقبل مقلوبا.

التمرين الثاني : (3,5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

0,25	1. أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي : $3+4i$.
0,5	ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): \; 4z^2-10iz-7-i=0$.
	2. ليكن a و b حلي المعادلة (E) حيث : $\Re e(a)<0$ والنقطتين A و B صورتي a و b على التوالي.
0,25	أ- تحقق أن : $\frac{b}{a}=1-i$.
0,75	ب- استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين وقائم الزاوية في A.

3. لتكن C نقطة لحقها c وتخالف النقطة A ولتكن D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ولتكن L صورة النقطة D بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{AO}$.	
أ- حدد بدلالة c العدد العقدي d لحق النقطة D.	0,5
ب- حدد بدلالة c العدد العقدي ℓ لحق النقطة L.	0,5
جـ- حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\frac{\ell-c}{a-c}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACL.	0,75
التمرين الثالث : (3 نقط)	
1. حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m بحيث : $m^2+1\equiv 0\ [5]$.	1
2. ليكن p عددا أوليا بحيث : $p=3+4k$ مع k عدد صحيح طبيعي. وليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n^2+1\equiv 0\ [p]$.	
أ- تحقق أن : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\ [p]$.	0,25
ب- بين أن n و p أوليان فيما بينهما.	0,5
جـ- استنتج أن : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1\ [p]$.	0,75
د- استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق: $n^2+1\equiv 0\ [p]$.	0,5
التمرين الرابع : (3 نقط)	
I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي : $f(x)=4xe^{-x^2}$ وليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.	
1. أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.	0,5
2. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0,+\infty\right[$ ثم ضع جدول تغيراتها.	0,75
3. حدد معادلة نصف المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في أصل المعلم ثم أنشئ $(\mathscr{C})$. (نأخذ : $\lVert\vec{i}\rVert=\lVert\vec{j}\rVert = 2\ cm$ ونقبل أن النقطة التي أفصولها $\sqrt{\frac{3}{2}}$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C})$)	0,75
4. أحسب التكامل $a=\int_0^1 f(x)\,dx$ ثم استنتج بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ ومحوري المعلم والمستقيم الذي معادلته $x=1$.	0,5
II. ليكن n عددا صحيحا طبيعيا لأكبر من أو يساوي 2. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي : $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$.	
1. أ- بين أن : $(\forall x>1)\ ;\ e^{-x^2}<e^{-x}$.	0,25
ب- استنتج نهاية الدالة f_n عندما تؤول x إلى $+\infty$.	0,25

0,75	2. أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $\left[0,+\infty\right[$ ثم ضع جدول تغيراتها.
0,5	3. بين انه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n من المجال $\left]0,1\right[$ بحيث : $f_n(u_n)=1$.
0,25	4. أ- تحقق أن : $f_{n+1}(u_n)=u_n \;;\; (\forall n\geq 2)$.
0,75	ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.
	5. نضع : $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
0,25	أ- بين أن : $0<\ell\leq 1$.
0,25	ب- بين أن : $-\dfrac{\ln(4)}{n}<\ln(u_n)<\dfrac{1}{n}-\dfrac{\ln(4)}{n} \;;\; (\forall n\geq 2)$.
0,5	جـ- استنتج أن : $\ell=1$.
	التمرين الخامس : (3,75 نقط)
	نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$.
0,25	1. بين أن الدالة F فردية.
	2. لكل x من المجال $\left]0,+\infty\right[$ نضع : $\varphi(x)=\displaystyle\int_1^{x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$.
0,25	أ- تحقق أن : $F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x) \;;\; (\forall x>0)$.
0,5	ب- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ثم احسب $F'(x)$ من اجل $x>0$.
0,5	جـ- استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $\left]0,+\infty\right[$.
0,5	3. أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أن : $F(x)=\dfrac{x}{\ln(1+c^2)} \;:\; \left(\exists c\in\left]x,2x\right[\right)\;(\forall x>0)$.
0,25	ب- استنتج أن : $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\dfrac{x}{\ln(1+x^2)} \;:\; (\forall x>0)$
0,75	جـ- حدد النهايات : $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.
0,75	د- تحقق أن : $F\left(\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}\right)>\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}$ و $F\left(\sqrt{e}-1\right)<\sqrt{e}-1$، ثم استنتج أن المعادلة $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في $\left]0,+\infty\right[$.