



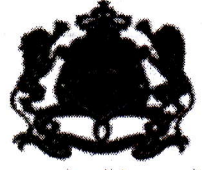
الصفحة

1

4

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2012
الموضوع

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

9	المعامل	NS24	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(5.5ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(4.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لايسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ في الحلقة الواحدية } (M_3(\mathbb{R}), +, \times), \text{ نعتبر المصفوفتين}$$

(1) احسب $I - A$ و A^2 0.75(2) استنتج أن A تقبل مقلوبا المطلوب تحديده. 0.5**II** - لكل عددين حقيقيين a و b من المجال $I =]1, +\infty[$ نضع : $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$ (1) تحقق أن $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$ 0.25(2) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في I 0.5(3) نذكر أن $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ زمرة تبادلية.

$$\varphi: \mathbb{R}^{**} \rightarrow I$$

نعتبر التطبيق

$$x \mapsto \sqrt{x+1}$$

أ- بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ نحو $(I, *)$ 0.5ب- استنتج بنية $(I, *)$ 0.25ج- بين أن المجموعة $\Gamma = \{\sqrt{1+2^m} / m \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $(I, *)$ 0.75التمرين الثاني: (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلانالمستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$.**I** - نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$ حيث a عدد عقدي غير منعدم.(1) حدد z_1 و z_2 حل المعادلة (E) 0.75(2) أ- تحقق أن : $z_1 z_2 = a^2(i-1)$ 0.25ب- بين أن : عدد حقيقي $z_1 z_2 \Leftrightarrow \arg a = \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$ 0.5**II** - ليكن c عددا حقيقيا غير منعدم و z عددا عقديا غير منعدم.(1) أ- بين أن : A و B و C و D و M التي أحاقها على التوالي هي : 1 و $1+i$ و c و ic و z (لاحظ أن $c = \bar{c}$) 0.5ب- بين أن : $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 2ic$ 0.5(2) ليكن h لحن النقطة H ، المسقط العمودي للنقطة O على (AD) أ- بين أن : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$ 0.75ب- استنتج أن : $(CH) \perp (BH)$ 0.25

التمرين الثالث: (3 نقط)نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة $(E) : 143x - 195y = 52$

- (1) 0.5 أ- حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 143 و 195 واستنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2
- 0.75 ب- علما أن الزوج $(-1, -1)$ حل خاص للمعادلة (E) ، حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) ميرزا مراحل الحل .

(2) 0.5 ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولي مع 5بين أن لكل k من \mathbb{N} لدينا: $n^{4k} \equiv 1 [5]$ (3) 0.5 ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث: $x \equiv y [4]$ أ- بين أن لكل n من \mathbb{N}^* لدينا: $n^x \equiv n^y [5]$ 0.5ب- استنتج أن لكل n من \mathbb{N}^* لدينا: $n^x \equiv n^y [10]$ 0.5(4) 0.25 ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين بحيث يكون الزوج (x, y) حلا للمعادلة (E) بين أنه لكل n من \mathbb{N}^* ، العدان n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .**التمرين الرابع: (5.5 نقطة)** n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$ ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (1) 0.5 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ (2) 0.5 أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $-\infty$ ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$ ، وحدد الوضع النسبي للمنحنى (C_n) و (D) 0.5(3) 0.75 ادرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها .(4) 0.75 أنشئ المنحنى (C_3) (نأخذ $f_3(-1, 5) = 0$ و $f_3(-0, 6) = 0$ و $f_3(1, 1) = \ln 3$)(5) 0.25 أ- بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن $\frac{e}{n} < \ln n$ ب- بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n حيث : 1

$$-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0 \quad \text{و} \quad x_n \leq -\ln n$$

ج- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 0.5(6) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x ; & x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$ أ- بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 0.25

ب- تحقق أن لكل $n \geq 3$: $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$ 0.25

ج- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$ 0.25

التمرين الخامس: (4.5 نقطة)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $F(0)=1$ و $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}$ لكل x من $]0,1]$ 0.25

(1) ليكن x من $[0,1]$. بين أن لكل t من $[0,x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$ 0.25

(2) ليكن x من $]0,1]$

أ- بين أن $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$ 0.5

ب- بين أن $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$: ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر . 0.75

(3) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل x من $[0,1]$: $\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$ 0.75

(4) ليكن x من $]0,1]$

أ- بين أن $F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$ 0.5

ب- بين أن $-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 1) 0.75

ج- بتطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة F في المجال $[0,x]$ بين أن : 0.75

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

د- استنتج أن الدالة F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 محددًا عددها المشتق على اليمين في 0 0.25

انتهى الموضوع