الإمتحـــــان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريـــــــا الدورة العـــــــادية 2013	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي المركز الوطني للتقويم و الامتحانات	مـــادة الريـــــــاضيات العلوم الرياضـــــــية أ و ب مدة الإنجاز : أربع ساعـــــات المعـــــــــــــامل: 9

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة .

نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2 \ ; \ x*y = x+y-2$

0,50 ن — 1 أ — بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي .

0,25 ن — 1 ب — بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده .

0,50 ن — 1 ج — بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية .

نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بـ : $\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2 \ ; \ x \top y = xy - 2x - 2y + 6$ — 2

و نعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي : $(\forall x\in\mathbb{Z}) \ ; \ f(x) = x+2$

0,50 ن — 2 أ — بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z}, \times)$ نحو $(\mathbb{Z}, \top)$.

0,25 ن — 2 ب — بين أن : $\forall (x,y,z)\in\mathbb{Z}^3 \ ; \ (x*y)\top z = (x\top z)*(y\top z)$

0,75 ن — 3 — إستنتج من كل ما سبق أن : $(\mathbb{Z}, *, \top)$ حلقة تبادلية و واحدية .

0,25 ن — 4 أ — بين أن : $x\top y = 2$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$ أو $y = 2$.

0,25 ن — 4 ب — استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z}, *, \top)$ كاملة .

0,25 ن — 4 ج — هل $(\mathbb{Z}, *, \top)$ جسم ؟ (علل الجواب)

التمرين الثاني : (3,5 ن)

I — ليكن a عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E) : 2z^2 - (3+i\sqrt{3})az + (1+i\sqrt{3})a^2 = 0$$

0,25 ن — I 1 — تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $(-1+i\sqrt{3})^2 a^2$.

0,50 ن — I 2 — حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

II — المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي : a و $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و z .

ليكن r الدوران الذي مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $A_1 = r^{-1}(A)$ و $B_1 = r(B)$

(حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

0,50 ن — II 1 — تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع .

0,50 ن — II 2 أ — بين أن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

0,50 ن — II 2 ب — بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع .

0,50 ن | II | 3 | أ | نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$ بين أن : $\frac{z-b_1}{z-a_1} = -\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \times \frac{a}{b}$

0,75 ن | II | 3 | ب | بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة .

التمرين الثالث : (3 ن)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1

و التي تحقق الخاصية $(\Re)$ التالية : $(\Re) : 3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$.

نفترض أن n يحقق الخاصية $(\Re)$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

0,75 ن | 1 | أ | بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$.

0,50 ن | 1 | ب | بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$.

0,50 ن | 1 | ج | بين أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $an - b(p-1) = 1$.

0,50 ن | 1 | د | ليكن r و q باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على $(p-1)$.

(يعني : $a = q(p-1) + r$ حيث $0 \leq r < p-1$ و $q \in \mathbb{Z}$)

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$.

0,75 ن | 2 | إستنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية $(\Re)$.

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x \ln x} \ ; \ (\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

0,25 ن | 1 | أ | بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 .

0,75 ن | 1 | ب | بين أن : $(\forall x > 1) \ ; \ \ln x < x - 1$ ثم استنتج أن h تناقصية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

0,50 ن | 2 | أ | أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h .

0,25 ن | 2 | ب | استنتج أن : $(\forall x \geq 1) \ ; \ 0 < h(x) \leq 1$.

الجزء الثاني نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \ ; \ (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 ن | 1 | أ | تحقق أن : $(\forall x > 1) \ ; \ \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$

0,25 ن | 1 | ب | تحقق أن : $(\forall x > 1) \ ; \ g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t} dt$

0,50 ن | 1 | ج | بين أن : $(\forall x > 1) \ ; \ g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \left(\frac{t-1}{t \ln t}\right) dt$

0,50 ن | 2 | أ | بين أن : $(\forall x > 1) \ ; \ \left(x - \sqrt{x}\right)h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq \left(x - \sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$

0,50 ن | ب | 2 | استنتج أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 .

0,75 ن | ج | 2 | بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$

0,75 ن | أ | 3 | بين أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$. و أن : $(\forall x > 1)\ ;\ g'(x) = \frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$

0,50 ن | ب | 3 | استنتج أن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن | ج | 3 | أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$.

الجزء الثالث

0,50 ن | I | 1 | بين أن الدالة : $k : x \longmapsto g(x) - x + 1$ تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$.

0,25 ن | I | 2 | استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1;+\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$.

II | نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + g(u_n)\ ;\ (\forall n \geq 0) \\ 1 \leq u_0 < \alpha \end{cases}$$

0,50 ن | أ | 1 | II | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$

0,50 ن | ب | 1 | II | بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .

0,75 ن | ج | 1 | II | استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة . و أن : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \alpha$

0,50 ن | أ | 2 | II | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0,50 ن | ب | 2 | II | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

0,25 ن | ج | 2 | II | استنتج مرة ثانية أن : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \alpha$