

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ (I) ① i

ليكن الزوج (a, b) عنصرا من E^2 .

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(b\sqrt{2} - 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(ab\sqrt{2} - a - b + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= a + b - ab\sqrt{2}$$

$$= a \perp b$$

■ (I) ②

يكفي أن نبين أن : $\forall (a, b) \in E^2 ; a \perp b \in E$

ليكن الزوج (a, b) عنصرا من E^2 .

يعني : $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه : $a\sqrt{2} - 1 \neq 0$ و $b\sqrt{2} - 1 \neq 0$

ومنه : $(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \neq 0$

ومنه : $\frac{-1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \neq 0$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن : $a \perp b \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

أي : $a \perp b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

أي : $a \perp b \in E$

و بالتالي \perp قانون تركيب داخلي في E .

■ (I) ②

لكي تكون (E, \perp) زمرة تبادلية يكفي أن يكون \perp تبادليا و تجميعيا و أن يقبل عنصرا محايدا في E و أن يقبل كل عنصر من E ممثلا من E .

ليكن الزوج (a, b) عنصرا من E^2 .

$$a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$$

$$\Leftrightarrow a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(b\sqrt{2} - 1)(a\sqrt{2} - 1)$$

$$\Leftrightarrow a \perp b = b \perp a$$

و منه : \perp تبادلي في E .

ليكن العنصر المحايد للقانون \perp في E

يعني : $(\forall x \in E) ; x \perp e = e \perp x = x$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in E) ; x + e - xe\sqrt{2} = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in E) ; e(1 - x\sqrt{2}) = 0$$

و بما أن : $x \in E$ فإن : $x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

يعني : $1 - x\sqrt{2} \neq 0$ و بالتالي : $e = 0$

و بما أن : $0 \in E$ فإن 0 هو العنصر المحايد للقانون \perp في E .

ليكن x عنصرا من E .

و ليكن y ممثلا x في E بالنسبة لـ \perp .

$$x \perp y = y \perp x = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - xy\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y(1 - x\sqrt{2}) = -x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-x}{(1 - x\sqrt{2})} = \frac{x}{(x\sqrt{2} - 1)}$$

و للتأكد من أن : $\frac{x}{(x\sqrt{2} - 1)} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

نفترض التساوي إذن : $x\sqrt{2} = x\sqrt{2} - 1$

ومنه : $0 = -1$ وهذا تناقض واضح.

و من ثم فإن : $\frac{x}{(x\sqrt{2} - 1)} \in E$

يعني أن كل عنصر x من E يقبل ممثلا و هو : $\frac{x}{(x\sqrt{2} - 1)}$

من E بالنسبة للقانون \perp .

خلاصة : (E, \perp) زمرة تبادلية.

■ (II) ① i

لدينا : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

إذن : $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow A^2 = -2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2A$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) &= I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A + \frac{ab}{2}A^2 \\ \Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) &= I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A - \frac{ab}{2}A \\ \Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) &= I + \frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A \\ \Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) &= M(a \perp b) \\ \Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) &= \varphi(a \perp b) \end{aligned}$$

لتكن S مصفوفة من F . إذن حسب تعريف المجموعة F :

$$(\exists a \in E) ; S = M(a)$$

و منه حسب تعريف التطبيق φ : $(\exists a \in E) ; S = \varphi(a)$

و بالتالي φ تطبيق شمولي من (E, \perp) نحو (F, \times)

ليكن a و b عنصرين من E بحيث: $\varphi(a) = \varphi(b)$

إذن حسب تعريف التطبيق φ : $M(a) = M(b)$

$$\left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A \right) = \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A \right) \quad \text{يعني:}$$

$$a = b \quad \text{و منه:}$$

و بالتالي φ تطبيق تبايني من (E, \perp) نحو (F, \times)

خلاصة: φ تشاكل تقابلي من (E, \perp) نحو (F, \times) .

⊕ (II) ②

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة.

و بما أن (E, \perp) زمرة تبادلية عنصرها المحيد بالقياسون 1 هو 0 و كل

$$\text{عصر } x \text{ من } E \text{ يقبل ممتلا } \left(\frac{x}{x\sqrt{2}-1} \right)$$

فإن زمرة تبادلية عنصرها المحيد بالقياسون \times هو

$$\varphi(0) \text{ و كل عنصر } y \text{ من } F \text{ يقبل ممتلا } \left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1} \right)$$

$$\varphi(0) = I + \frac{0}{\sqrt{2}}A = I \quad \text{و لدينا:}$$

$$\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right) = I + \frac{y}{\sqrt{2}(y\sqrt{2}-1)}A = I + \frac{y}{2y-\sqrt{2}}A$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y} & \frac{y}{2y-\sqrt{2}} \\ \frac{y}{2y-\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y} \end{pmatrix} = M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\text{و لدينا كذلك: } M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$$

⊕ (II) ①

يكفي أن نبين أن:

$$(\forall M(a) \in F), (\forall M(b) \in F) ; M(a) \times M(b) \in F$$

في البداية نلاحظ أن $M(a)$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2 و ذات معاملات حقيقية

إذن المجموعة F جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $M(a)$ و $M(b)$ عنصرين من F بحيث: $(a, b) \in E^2$

$$\text{لدينا: } M(a) \times M(b) = \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A \right) \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A \right)$$

$$\Leftrightarrow M(a) \times M(b) = I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A + \frac{ab}{2}A^2$$

$$\Leftrightarrow M(a) \times M(b) = I + \frac{b}{\sqrt{2}}A + \frac{a}{\sqrt{2}}A - \frac{ab}{2}A$$

$$\Leftrightarrow M(a) \times M(b) = I + \frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A$$

$$\Leftrightarrow M(a) \times M(b) = M(a \perp b)$$

لكي تكون المصفوفة $M(a \perp b)$ عنصرا من F يكفي أن يكون $a \perp b$ عنصرا من E

و بالفعل $a \perp b \in E$ لأن 1 قانون تركيب داخلي في E و $a \in E$ و $b \in E$.

إذن نحصل على: $M(a) \times M(b) \in F$

و بالتالي F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

⊕ (II) ② i

لكي يكون التطبيق φ تشاكلا من (E, \perp) نحو (F, \times) يكفي أن نتأكد من

$$\forall (a, b) \in E^2 ; \varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(a \perp b) \quad \text{أن:}$$

و لكي يكون التطبيق φ تقابلا يكفي أن يكون شموليا و تباينيا.

ليكن a و b عنصرين من E .

$$\Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) = M(a) \times M(b)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(a) \times \varphi(b) = \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}}A \right) \left(I + \frac{b}{\sqrt{2}}A \right)$$

و للتأكد :

$$\begin{aligned}
 M(y) \times M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right) &= \left(I + \frac{y}{\sqrt{2}}A\right)\left(I + \frac{y}{2y-\sqrt{2}}A\right) \\
 &= I + \frac{y}{\sqrt{2}}A + \frac{y}{2y-\sqrt{2}}A + \frac{y^2}{\sqrt{2}(2y-\sqrt{2})}A^2 \\
 &= I + \frac{y}{\sqrt{2}}A + \frac{y}{\sqrt{2}(\sqrt{2}y-1)}A - \frac{2y^2}{2(\sqrt{2}y-1)}A \\
 &= I + \left(\frac{2(\sqrt{2}y-1)y + 2y - 2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A \\
 &= I + \left(\frac{2\sqrt{2}y^2 - 2y + 2y - 2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A \\
 &= I + 0 \\
 &= I
 \end{aligned}$$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

⊕ (1) (I) ■

يكفي أن نبين أن :

$$(a+i)^2 - (1+a)(1+i)(a+i) + i(1+a^2) = 0$$

و للوصول إلى ذلك ننشر أو نعمل. نختار تقنية التحميل.

$$\begin{aligned}
 (a+i)^2 + i(1+a^2) &= (a+i)^2 + i(a^2 - i^2) \\
 &= (a+i)(a+i) + i(a-i)(a+i) \\
 &= (a+i)(a+i) + (ai+1)(a+i) \\
 &= (a+i)(a+i+ai+1) \\
 &= (a+i)(a+1)(i+1)
 \end{aligned}$$

و منه : $(a+i)$ حل للمعادلة (E).

⊕ (1) (I) ■

تكبير : إذا كان u و v هما حلا للمعادلة : $ax^2 + bx + c = 0$

$$u + v = \frac{-b}{a} \text{ و } uv = \frac{c}{a} \text{ فإن}$$

لدينا u و v هما حلا للمعادلة (E).

$$u + v = \frac{(1+a)(1+i)}{1} \text{ إذن}$$

نعرض u بقيمة نحصل على : $(i+a) + v = (1+a)(1+i)$

$$v = (1+a)(1+i) - (i+a) \text{ و منه}$$

$$\Leftrightarrow v = 1 + i + a + ai - i - a$$

$$\Leftrightarrow v = 1 + ai$$

⊕ (2) (I) ■

نعلم أن كل عدد حقيقي يكون دائما مساويا لمرافقه و سوف نستغل هذه الخاصية لكي نبرهن على أن $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي .

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \overline{\left(\frac{a+i}{ai+1}\right)} = \frac{\bar{a}-i}{1-i\bar{a}} \text{ لدينا}$$

بما أن : $|a| = 1$ فإن : $|a| = \sqrt{a\bar{a}} = 1$

$$\bar{a} = \frac{1}{a} \text{ إذن}$$

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{a}-i}{1-i\bar{a}} = \frac{\frac{1}{a}-i}{1-\frac{1}{a}i} = \frac{1-ai}{a-i} \text{ و منه}$$

نضرب بسط و مقام النتيجة الأخيرة في العدد العكسي i نحصل على :

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{1-ai}{a-i} = \frac{a+i}{ai+1} = \frac{u}{v}$$

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{u}{v} \text{ إذن نستنتج مما سبق أن :}$$

يعني أن العدد $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي.

⊕ (2) (I) ■

$$u^2 = (a+i)^2 = a^2 + 2ai - 1 \text{ لدينا}$$

$$\Leftrightarrow u^2 = a\left(a + 2i - \frac{1}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow u^2 = a(a + 2i - \bar{a})$$

$$\Leftrightarrow u^2 = a[(a - \bar{a}) + 2i]$$

⊕ (2) (I) ■

بصفة عامة، إذا كان : $z = \Re(z) + i\Im(z)$ فإن $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$

$$u^2 = a[(a - \bar{a}) + 2i] \text{ لدينا حسب السؤال (ب)}$$

إذن عمدة الطرف الأيمن يوافق عمدة الطرف الثاني بتربيد 2π

$$2\text{Arg}(u) \equiv \text{Arg}\left(a[(a - \bar{a}) + 2i]\right) [2\pi] \text{ إي}$$

$$2\text{Arg}(u) \equiv \text{Arg}(a) + \text{Arg}((a - \bar{a}) + 2i) [2\pi] \text{ يعني}$$

$$a - \bar{a} + 2i = 2i\Im(a) + 2i = 2i(\Im(a) + 1) \text{ لدينا}$$

$$\text{و منه : } \text{Arg}(a - \bar{a} + 2i) \equiv \text{Arg}(2i) + \text{Arg}(\Im(a) + 1)$$

$$\text{لدينا } 2i \text{ عدد تخيلي صرف. إذن : } \text{Arg}(2i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

و لدينا كذلك $(\Im(a) + 1)$ عدد حقيقي. إذن : $\text{Arg}(\Im(a) + 1) \equiv 0 [2\pi]$

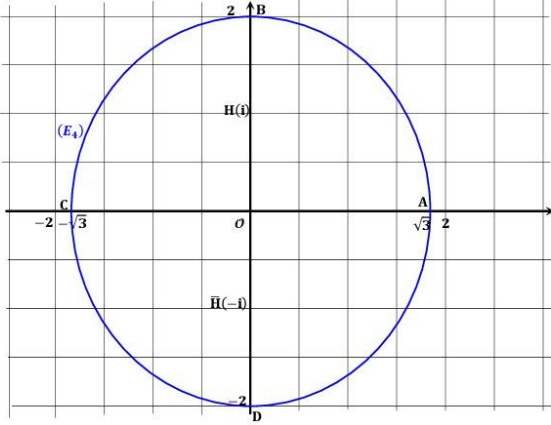
$$2\text{Arg}(u) \equiv \text{Arg}(a) + \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ و بالتالي}$$

$$\text{و منه : } \text{Arg}(u) \equiv \frac{1}{2}\text{Arg}(a) + \frac{\pi}{4} [\pi]$$

⊕ (II) 2

(E_4) إهليج يتميز بلعنصر التلية :

- مركزه O
- رؤوسه : $A(\sqrt{3}, 0)$ و $B(-\sqrt{3}, 0)$ و $C(0, 2)$ و $D(0, -2)$
- بؤرتاه : $H(0, 1)$ و $\bar{H}(0, -1)$
- تباعده المركزي : $e = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}$



⊕ (II) 3

في المجموعة \mathbb{C} لدينا : $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$

إذن في المجموعة \mathbb{R}^2 لدينا : $A(\sqrt{3}, 0)$ و $B(0, 2)$

لنحدد معادلة المستقيم (AB) والتي نكتب في شكلها المختصر كالتالي :

$$(AB) : y = px + q$$

بحيث p هو الميل و q هو الأرتوب عند الأصل.

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{-\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$(AB) : y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}x + q \quad \text{إذن}$$

ولدينا : $B(0, 2)$ نقطة من (AB) .

$$b = 2 : \text{إذن} \quad 2 = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \times 0 + b \quad \text{ومنه} : b = 2$$

$$(AB) : y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 2 \quad \text{و بالتالي}$$

لكي يكون (AB) مماساً للإهليج (E_8) يكفي أن نحدد نقطة تقاطع

(AB) و (E_8) ثم نحدد بعد ذلك معادلة المماس لـ (E_8) في تلك

النقطة و نبين أن تلك المعادلة ما هي إلا معادلة المستقيم (AB) .

⊕ (II) 1

لتكن H صورة العدد العقدي i

و لتكن \bar{H} صورة العدد العقدي $-i$

و لتكن M صورة العدد العقدي a

لدينا : $|a + i| + |ai + 1| = m$ يعني $|u| + |v| = m$

لنبين أن : $|ai + 1| = |a - i|$

لدينا : $ai + 1 = i(a - i)$

و منه : $|ai + 1| = |i(a - i)|$

يعني : $|ai + 1| = |i||a - i|$

أي : $|ai + 1| = 1|a - i| = |a - i|$

إذن : $|a + i| + |a - i| = m$

و منه : $|a - (-i)| + |a - i| = m$

أي : $\bar{H}M + HM = m$

لكي تكون مجموعة النقط (E_m) إهليج يكفي أن نتحقق من أن : $\bar{H}H \leq m$

لدينا : $\bar{H}H = |i - (-i)| = |2i| = 2$

و لدينا حسب المعطيات : $m \geq 2$ إذن : $m \geq \bar{H}H$

و بالتالي (E_m) إهليج مركزه هو منتصف القطعة $[\bar{H}H]$ أي النقطة O

⊕ (II) 2

بما أن (E_m) إهليج.

فإن معادلاته الديكارتية نكتب على الشكل : $(E_m) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

لنحدد الآن قيمتي العددين a و b .

لدينا $2b = m$ إذن $b = \frac{m}{2}$

و منه : $b^2 = \frac{m^2}{4}$

و نعلم كذلك أن : $c = \frac{\bar{H}H}{2} = 1$ و $c^2 = b^2 - a^2$

إذن : $a^2 = b^2 - c^2$

و بالتالي المعادلة الديكارتية للإهليج (E_m) هي :

$$(E_m) : \frac{x^2}{\left(\frac{m^2}{4} - 1\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{m^2}{4}\right)} = 1$$

$$(E_m) : x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \left(\frac{m^2}{4} - 1\right) \quad \text{يعني}$$

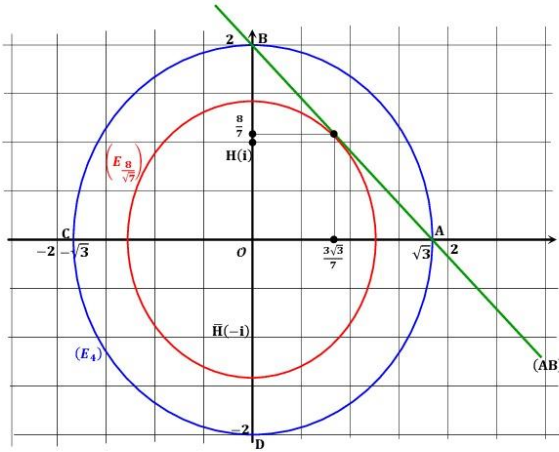
إذن معادلة المساس هي : $\frac{3\sqrt{3}}{7}x + \frac{9}{16}y = \frac{9}{7}$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{7}x + \frac{9}{14}y = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

و هذه الكتابة الأخيرة هي بلغة معادلة المستقيم (AB) .

و بالتالي (AB) هو المساس لـ (E_8) في النقطة : $(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7})$.



التمرين الثالث : (3,0 ن)

1 1 ■

تُدير خوارزمية أفليدس و نوقف محركاتها فور الحصول على باقي منعدم.

37 غير منعدم إذن واصل.

$$\begin{array}{r|l} 232 & 195 \\ & 1 \\ \hline & 37 \end{array}$$

المرحلة الأولى :

10 غير منعدم إذن واصل.

$$\begin{array}{r|l} 195 & 37 \\ & 5 \\ \hline & 10 \end{array}$$

المرحلة الثانية :

7 غير منعدم إذن واصل.

$$\begin{array}{r|l} 37 & 10 \\ & 3 \\ \hline & 7 \end{array}$$

المرحلة الثالثة :

على بركة الله، لدينا حسب السؤال (2) (i) :

$$(E_8) : x^2 + \left(1 - \frac{4}{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}\right)y^2 = \left(\frac{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}{4} - 1\right)$$

$$(E_8) : x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7}$$

لتحديد نقطة تقاطع (AB) و (E_8) نحل النظمة التالية :

$$\begin{cases} x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7} \\ y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 2 \end{cases}$$

نعوض y بقيمته في المعادلة (E_8) نحصل على :

$$x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 2\right)^2 = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{4}{3}x^2 + 4 - \frac{8\sqrt{3}}{3}x\right) = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{3}x = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{3}x + \frac{27}{28} = 0$$

نضرب طرفي المعادلة في العدد 28 نحصل على :

$$\Leftrightarrow (7x)^2 - 2(7x)(3\sqrt{3}) + (3\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x - 3\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x - 3\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

نعوض x في معادلة (AB) نجد :

$$y = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{7} + 2 = \frac{8}{7}$$

من جهة أخرى لدينا معادلة المساس لـ (E_8) في النقطة $(\frac{3\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7})$

$$xx_0 + \frac{9}{16}yy_0 = \frac{9}{7}$$

$$x_0 = \frac{3\sqrt{3}}{7} \text{ و } y_0 = \frac{8}{7}$$



إذن الحل الخاص للمعادلة هو الزوج : $(-69, -58)$

سوف نحدد الآن صيغة الحل العام للمعادلة (E)

$$195x - 232y = 1 \text{ يعني :}$$

$$\text{و لدينا : } 195(-69) - 232(-58) = 1$$

ننجز عملية الفرق بين هاتين المتساويتين نحصل على :

$$195(x + 69) - 232(y + 58) = 0$$

$$(*) \quad 195(x + 69) = 232(y + 58) \text{ يعني :}$$

$$\text{إذن : } 195 / 232(y + 58)$$

إذن حسب (Gauss) : $195 / (y + 58) = 1$ لأن $195 \wedge 232 = 1$

$$\text{و منه : } y + 58 = 195k' \quad ; \quad (\exists k' \in \mathbb{Z})$$

$$\text{يعني : } y = 195k' - 58$$

لإيجاد قيمة x نعوض y في المعادلة (*) نحصل على :

$$195(x + 69) = 232(195k' - 58)$$

$$\text{يعني : } x = 232k' - 69$$

بما أن k' عدد نسبي فإن : $k' = k + 1 \quad ; \quad (\exists k \in \mathbb{Z})$

$$\text{و منه : } x = 232(k + 1) - 69$$

$$\text{أي : } x = 232k + 163$$

$$\text{و لدينا كذلك : } y = 195k' - 58$$

$$\text{أي : } y = 195(k + 1) - 58$$

$$\text{و منه : } y = 195k + 137$$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \{(232k + 163; 195k + 137) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

■ (1) ج

ننتقل من الشرط : $195d \equiv 1[232]$

$$\text{الذي يعني : } 232 / (195d - 1)$$

$$\text{و منه : } 232b = 195d - 1 \quad ; \quad (\exists b \in \mathbb{Z})$$

$$\text{أي : } 195d - 232b = 1$$

و منه : (d, b) حل للمعادلة (E).

إذن (d, b) عنصر من (S).

$$\text{و منه : } \begin{cases} d = 163 + 232k \\ b = 137 + 195k \end{cases} \quad ; \quad (\exists k \in \mathbb{Z})$$

3 غير منقسم إذن واصل.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ & 1 \\ \hline & 3 \end{array}$$

المرحلة الرابعة :

1 غير منقسم إذن واصل.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

المرحلة الخامسة :

0 منقسم إذن توقف.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

المرحلة السادسة :

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 232 هو آخر باقي غير منقسم أي : 1

$$\text{و بالتالي : } 195 \wedge 232 = 1$$

■ (1) د

في البداية يجب علينا أن نبحث عن الحل البديهي (أو الحل الخاص) لـ (E).

لدينا حسب خوارزمية أقليدس الواردة في السؤال السابق :

$$\text{المرحلة الأولى : } 37 = 232 - 1 \times 195$$

$$\text{المرحلة الثانية : } 10 = 195 - 5 \times 37$$

$$\text{المرحلة الثالثة : } 7 = 37 - 3 \times 10$$

$$\text{المرحلة الرابعة : } 3 = 10 - 1 \times 7$$

$$\text{المرحلة الخامسة : } 1 = 7 - 2 \times 3$$

الطريقة هي كالتالي :

ننتقل من المرحلة الخامسة : $1 = 7 - 2 \times 3$

- ثم نعوض 3 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 7 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 10 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 37 بقيمتها ثم نبسط

$$\text{إلى العمل : لدينا } 1 = 7 - 2 \times 3$$

نعوض 3 في هذا التعبير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$1 = 3 \times 7 - 2 \times 10$$

نعوض 7 في هذا التعبير الأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$1 = 3 \times 37 - 11 \times 10$$

نعوض 10 في هذا التعبير الأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$1 = 58 \times 37 - 11 \times 195$$

نعوض 37 في هذا التعبير الأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$1 = 58 \times 232 - 69 \times 195$$



■ (3) ب

ليكن a و b عنصرين من A بحيث: $f(a) = b$

لدينا: $a^{195} \equiv f(a)[233]$

و بما أن: $f(a) = b$ فإن: $a^{195} \equiv b[233]$

و منه: $a^{195d} \equiv b^d[233]$ (3)

من جهة أخرى لدينا حسب مير هنة (Fermat): $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن: $a^{-232k} \equiv 1[233]$ (4)

نضرب المتوافقتين (3) و (4) طرفا بطرف نحصل على:

$$a^{195d-232k} \equiv b^d[233]$$

و منه: $a^1 \equiv b^{163}[233]$ لأن $d = 163$ هو العدد الوحيد الذي

يحقق الشرطين $195d \equiv 1[232]$ و $d \in A$

و منه: $a \equiv b^{163}[233]$ هو الجواب الأخير.

كما يمكن إضافة ما يلي: $233 / (a - b^{163})$

يعني: $(\exists k \in \mathbb{Z}); (a - b^{163}) = 233k$

أي: $a = b^{163} + 233k; k \in \mathbb{Z}$

■ (3) ج

نستنتج من نتيجة السؤال (3) (i):

أن f تطبيق تبايني من A نحو A

كما نستنتج من نتيجة السؤال (3) ب):

أن التطبيق f شمولي من A نحو A

إذن f تقليل من A نحو A و تقلبه العكسي f^{-1} نستنتجه من جواب السؤال (3) ب):

$$f: A \rightarrow A$$

$$a \rightarrow f(a) \equiv a^{195}[233]$$

و

$$f^{-1}: A \rightarrow A$$

$$b \rightarrow f^{-1}(b) \equiv b^{163}[233]$$

لدينا الشرط الآخر $0 \leq d \leq 232$

يعني: $0 \leq 163 + 232k \leq 232$

و منه: $0,7 \leq k \leq 0,2$

العدد الصحيح النسبي الوحيد المحصور بين 0,2 و 0,7 هو 0

إذن: $d = 163 + 232 \times 0 = 163$

■ (2)

يكفي: أن نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي

$\sqrt{233}$ لا تقسم العدد 233.

و تلك الأعداد الأولية هي: 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

■ (3) ا

ليكن a و b عنصرين من $A \setminus \{0\}$ بحيث: $f(a) = f(b)$.

$$\begin{cases} a^{195} \equiv f(a)[233] \\ b^{195} \equiv f(b)[233] \end{cases}$$

لدينا:

بما أن $f(a) = f(b)$ فإن: $a^{195} \equiv b^{195}[233]$

و منه: $a^{195d} \equiv b^{195d}[233]$

و لدينا: $195d \equiv 1[232]$ يعني: $195d = 232k + 1$

إذن: $a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]$

من جهة أخرى لدينا حسب مير هنة فيرما: $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن: $a^{232k} \equiv 1[233]$ و منه: $a^{232k+1} \equiv a[233]$ (1)

بنفس الطريقة نجد: $b^{232k+1} \equiv b[233]$ (2)

بما أن: $a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]$ فإن: $a \equiv b[233]$

و ذلك باستعمال النتيجتين (1) و (2)

و منه: 233 يقسم $|a - b|$.

لدينا: $a \in A$ و $b \in A$

يعني: $0 < a \leq 232$ و $0 < b \leq 232$

و منه: $|a - b| \leq 232$

نلاحظ أن 233 يقسم عددا أصغر منه و هو $|a - b|$ إذن: $|a - b| = 0$

و بالتالي: $a = b$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

1 (I) ■

ليكن x عنصرا من \mathbb{R} .

$$g'(x) = e^x + e^x(x-1) = xe^x \quad \text{لدينا}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0 \quad \text{بما أن}$$

فإن إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارة x .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{إذا كان } x = 0 \text{ فإن } g'(x) = 0 \\ \text{إذا كان } x > 0 \text{ فإن } g'(x) > 0 \\ \text{إذا كان } x < 0 \text{ فإن } g'(x) < 0 \end{array} \right.$$

$$\text{ولدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$$

$$\text{ولدينا كذلك : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

نلخص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	1	0	$+\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن القيمة العددية للدالة g هي 0

و g دالة متصلة على \mathbb{R} .

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0 \quad \text{إذن :}$$

2 (I) ■

لدينا g دالة تناقصية قطعاً على المجال $]-\infty, 0[$

$$(\forall x < 0) ; g(x) > 0 \quad \text{إذن :}$$

ولدينا g دالة تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$

$$(\forall x > 0) ; g(x) > 0 \quad \text{إذن :}$$

ولدينا العنصر الوحيد الذي صورته بالدالة g منعدمة هو 0. إذن : $g(0) = 0$

1 (II) ■

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{(+\infty) - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 0 + (+\infty) = +\infty$$

2 (II) ■

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{e^x - e^0}{x - 0}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right) = e^0 = 1 \quad \text{بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{1} = 1 = f(0) \quad \text{فإن}$$

و منه f دالة متصلة في الصفر.

1 3 (II) ■

ليكن x عنصرا من \mathbb{R}^* .

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{-1 - e^x(x-1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

3 (II) ■

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2} \quad \text{لدينا حسب السؤال (i)}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; 0 < (e^x - 1)^2 \quad \text{بما أن}$$

فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $g(x)$

لدينا g تنعدم في نقطة واحدة أفصولها 0 و ذلك حسب السؤال (I) 2

$$\text{إذن } f'(x) \text{ تنعدم إذا كان } x = 0$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0 \quad \text{ولدينا كذلك حسب السؤال (I) 1}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) \leq 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\text{ولدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \frac{-\infty}{0 - 1} = +\infty$$

$$\text{ولدينا كذلك حسب السؤال (II) 1 : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

و من هذه الدراسة نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
f	$+\infty$	1	0



$$\Leftrightarrow \frac{-x^2}{2} e^{-x} \leq -J(x) \leq \frac{-x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

الحالة الثالثة: إذا كان x منعدم فإن: $J(0) = 0$

$$\frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \quad \text{و منه}$$

$$0 \leq 0 \leq 0 \quad \text{لأن:}$$

خلاصة:

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \quad \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

■ (II) 4 (II) د

لدينا حسب السؤال (ب)

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \quad \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و منه حسب السؤال (ا)

$$\frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq e^{-x} (e^x - 1 - x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

نفترض أن $x \neq 0$ ثم نضرب أطراف هذا التأيير في العدد الموجب $\frac{e^x}{x^2}$

علما أن هذا الترتيب سوف لن يتغير نحصل على:

$$\frac{1}{2} e^x e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^x e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و بالتالي بعد تبسيط طرف اليمين و طرف اليسار نحصل على:

$$\frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \leq \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}$$

■ (II) 4 (II) د

لدينا حسب نتيجة السؤال (ج)

$$\frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \leq \frac{(e^x - 1 - x)}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}$$

$x \rightarrow 0$

$$\left(\frac{1}{2}\right)$$

$x \rightarrow 0$

$$\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{إذن:}$$

■ (II) 4 (II) ا

$$J(x) = \int_0^x t e^{-t} dt \quad \text{لدينا}$$

نضع: $u(t) = t$ إذن: $u'(t) = 1$

و نضع: $v'(t) = e^{-t}$ إذن: $v(t) = -e^{-t}$

$$\text{ومنه: } J(x) = [uv]_0^x - \int_0^x u'v dt$$

$$\Leftrightarrow J(x) = [t(-e^{-t})]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) dt$$

$$\Leftrightarrow J(x) = [-te^{-t}]_0^x + [-e^{-t}]_0^x$$

$$\Leftrightarrow J(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow J(x) = e^{-x}(e^x - x - 1)$$

■ (II) 4 (II) د

ليكن x عددا حقيقيا . فنصل بين ثلاث حالات :

الحالة الأولى: إذا كان x موجب فإن: $|x| = x$

و منه: $x - |x| = 0$ و $|x| + x = 2x$

ليكن $0 \leq t \leq x$ إذن $e^{-x} \leq e^{-t} \leq e^0$

و منه: $te^{-x} \leq te^{-t} \leq t$

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على:

$$\int_0^x te^{-x} dt \leq \int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x t dt$$

$$e^{-x} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq J(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \quad \text{يعني:}$$

$$\frac{x^2}{2} e^{-x} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} \quad \text{ومنه:}$$

$$\frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \quad \text{و بالتالي:}$$

الحالة الثانية: إذا كان x سالب فإن: $|x| = -x$

و منه: $x - |x| = 2x$ و $|x| + x = 0$

ليكن $x \leq t \leq 0$ إذن $e^0 \leq e^{-t} \leq e^{-x}$

و منه: $te^{-x} \leq te^{-t} \leq t$ (تغير الترتيب لأن عدد سالب)

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على:

$$\int_x^0 te^{-x} dt \leq \int_x^0 te^{-t} dt \leq \int_x^0 t dt$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^0 \leq -J(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^0$$

و لدينا من جهة أخرى :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - e^x + 1}{xe^x - x} \right)$$

نحاول إظهار الكمية $\left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right)$ نحصل على :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} - \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right) \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} - \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right) f(x)$$

لدينا حسب السؤال (II) ② : f متصلة في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \frac{-1}{2} \times 1 = \frac{-1}{2}$$

و بالتالي نستنتج أن : f قابلة للاشتقاق في الصفر و $f'(0) = \frac{-1}{2}$

■ (II) ⑤ ①

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-g'(x)(e^x - 1)^2 + g(x)(2(e^x - 1)e^x)}{(e^x - 1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x - 1)^2 + (1 + (x - 1)e^x)(2(e^x - 1)e^x)}{(e^x - 1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x - 1)^2 + 2(e^x - 1)e^x + 2(x - 1)(e^x - 1)e^{2x}}{(e^x - 1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x - 1) + 2e^x + 2(x - 1)e^{2x}}{(e^x - 1)^3}$$

$$= \frac{e^x(-xe^x + x + 2 + 2xe^x - 2e^x)}{(e^x - 1)^3}$$

$$= \frac{e^x(xe^x + x + 2 - 2e^x)}{(e^x - 1)^3}$$

$$= \frac{e^x(e^x(x - 2) + (x + 2))}{(e^x - 1)^3}$$

■ (II) ⑤ ②

نضع : $\varphi(x) = e^x(x - 2) + 2 + x$

لدينا : $\varphi'(x) = (xe^x - 2e^x + 2 + x)'$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = xe^x + e^x - 2e^x + 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = xe^x - e^x + 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = e^x(x - 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = g(x)$$

و نعلم حسب السؤال (I) ① : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$

و بالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi'(x) \geq 0$

أي دالة φ تزايدية على \mathbb{R} .

و لدينا : $\varphi(0) = 0$ و f دالة تزايدية على \mathbb{R} .

إذا كان $x \geq 0$ فإن : $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$

إذا كان $x \leq 0$ فإن : $\varphi(x) \leq \varphi(0) = 0$

■ (II) ⑤ ③

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (e^x(x - 2) + (x + 2)) \quad \text{لدينا :}$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \times \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)}$$

لدينا : $(e^x - 1)^2 > 0$ و $e^x > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^*$)

إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق بإشارة $\varphi(x)$ و $(e^x - 1)$

إذا كان $x > 0$ فإن : $\varphi(x) > 0$ و $e^x > e^0$

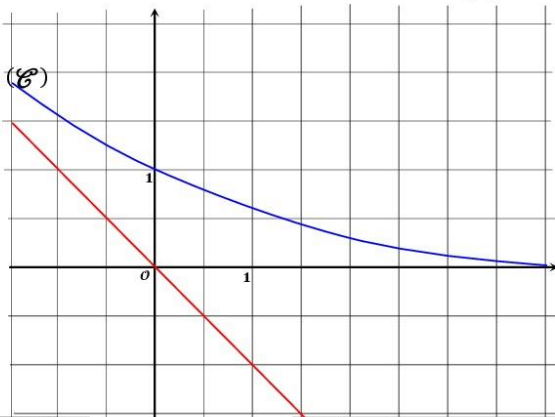
$$\text{إذن : } f''(x) > 0$$

إذا كان $x < 0$ فإن $\varphi(x) < 0$ و $e^x < e^0$

$$\text{إذن : } f''(x) > 0$$

و في كلتا الحالتين نلاحظ أن : $f''(x) > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^*$) ; و هذا يعني أن منحنى الدالة f محدب

■ (II) ⑤ ④





بما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) \leq \frac{1}{2}$

إذن : $f'(c) \leq \frac{1}{2}$ و منه : $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |f(u_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$$

■ (III) 2 3

لدينا حسب السؤال 3

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

$$\Leftrightarrow |u_n - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \ln 2|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_{n-2} - \ln 2|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |u_{n-3} - \ln 2|$$

⋮ ⋮

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n} - \ln 2|$$

نستنتج إذن أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \ln 2|$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ محصور بين 1 و -1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \ln 2| = 0 \quad \text{و منه}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ln 2 \quad \text{يعني}$$

و بالتالي : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تتوّل إلى $\ln 2$.

■ (IV) 1 i

باستعمال البرهان بفصل الحالات نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $x > 0$

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt \quad \text{لدينا}$$

مع العلم أن f دالة تناقصية على \mathbb{R} و ذلك حسب السؤال (III) 3

ليكن : $x \leq t \leq 2x$

$$f(x) \geq f(t) \geq f(2x) \quad \text{يعني}$$

■ (III) 1

لنحل المعادلة : $f(x) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x$$

$$\Leftrightarrow x = x e^x - x$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 2$$

إذن $\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$

■ (III) 2 i

يكفي أن نبين أن : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

لدينا حسب السؤال (II) 5 3 : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f''(x) > 0$

إذن f' دالة تزايدية على \mathbb{R}^*

إذا كان $x > 0$ فإن : $f'(x) \geq f'(0)$

$$(1) \quad f'(x) \geq \frac{-1}{2} \quad \text{يعني}$$

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2} \leq 0 \quad \text{لدينا من جهة أخرى}$$

و ذلك لأن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$

إذن من الكتابة $f'(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}$ نستنتج أن :

$$(2) \quad f'(x) \leq \frac{1}{2} \quad \text{و منه}$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{يعني}$$

■ (III) 2 3

بما أن الدالة f قليلة للاشتقاق على \mathbb{R} فإنه بإمكاننا تطبيق ميرنه التزايديات

المنتهية على أي مجال من \mathbb{R} . نختار المجال الذي طرفاه $\ln 2$ و u_n .

إذن يوجد عدد c محصور بين $\ln 2$ و u_n بحيث :

$$\frac{f(u_n) - f(\ln 2)}{u_n - \ln 2} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(u_n) - f(\ln 2)}{u_n - \ln 2} \right| = |f'(c)|$$

$$\Rightarrow |f(u_n) - f(\ln 2)| = |f'(c)| |u_n - \ln 2|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{F(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \right) = 1 = F'(0) \quad \text{ومنّه :}$$

① ② (IV) ■

لدينا الدالة f متصلة على \mathbb{R} وبالخصوص على $[x, 2x]$ مع $x \in \mathbb{R}^+$

إذن f تقبل دالة أصلية h بحيث : $F(x) = h(2x) - h(x)$

لدينا $x \rightarrow h(x)$ و $x \rightarrow 2x$ دالتين قابلتين للإشتقاق على \mathbb{R}^* .

إذن $x \rightarrow h(2x)$ دالة قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}^* لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على \mathbb{R}^* .

$$F(x) = h(2x) - h(x) \quad \text{ولدينا :}$$

$$F'(x) = 2h'(2x) - h'(x) \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 2 \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) - \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$$

و بما أنك تلميذ من السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية
فإنك تستطيع الوصول إلى النتيجة انطلاقاً من التعبير أعلاه.

$$\Leftrightarrow F'(x) = \left(\frac{3 - e^x}{e^x + 1} \right) f(x) \quad \text{ومنّه :}$$

① ② (IV) ■

لدينا حسب جدول إشارة f في السؤال ③ (II)

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) > 0$$

و ذلك لأن f متصلة و تناقصية قطعاً على \mathbb{R} و قيمتها الدنوية هي : 0

إذن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(3 - e^x)$.

$$\text{لأن : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x + 1 > 0$$

نستنتج إذن جدول تغيرات F كما يلي :

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$
$F'(x)$	+	①	0	-
F	$-\infty$	0	$F(\ln 3)$	0

■ و الحمد لله رب العالمين ■

$$\frac{x}{e^x - 1} \geq \frac{t}{e^t - 1} \geq \frac{2x}{e^{2x} - 1} \quad \text{ومنّه :}$$

ندخل التكامل على هذا الترتيب نحصل على :

$$\int_x^{2x} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) dt \geq \int_x^{2x} \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) dt \geq \int_x^{2x} \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) dt$$

$$\left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right) \geq F(x) \geq \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \quad \text{ومنّه :}$$

الحالة الثانية : إذا كان $x < 0$

ليكن : $2x \leq t \leq x$

يعني : $f(2x) \geq f(t) \geq f(x)$

$$\int_{2x}^x f(2x) dt \geq \int_{2x}^x f(t) dt \geq \int_{2x}^x f(x) dt$$

$$-\int_x^{2x} f(2x) dt \geq -\int_x^{2x} f(t) dt \geq -\int_x^{2x} f(x) dt$$

$$-xf(2x) \geq -F(x) \geq -xf(x)$$

$$xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x)$$

$$\left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$$

$$\text{خلاصة : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$$

① ① (IV) ■

$$\text{نعلم أن : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$$

$$\text{و لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\frac{e^{2x} - e^0}{2x - 0}} \right) = \left(\frac{0}{e^0} \right) = 0$$

$$\text{و لدينا كذلك : } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\frac{e^x - e^0}{x - 0}} \right) = \left(\frac{0}{e^0} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0) \quad \text{و بالتالي :}$$

أي F دالة متصلة في 0

① ① (IV) ■

$$\text{لدينا : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) \leq \frac{F(x)}{x} \leq \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$$