

التمرين الاول : البنيات الجبرية

$$F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\} : \text{ لتكن المجموعة } F$$

1 - أ) نبين ان F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ لتكن $M(x, y)$ و $M(a, b)$ من F لدينا

$$M(x, y) \times M(a, b) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb + \frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa} \end{pmatrix} = M(xa, xb + \frac{y}{a})$$

ومن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

ب) نبين أن (F, \times) زمرة غير تبادلية

(1) بما أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ و \times تجميعي في $M_2(\mathbb{R})$ فإن \times تجميعي في F

(2) لدينا $I = M(1, 0) \in F$ العنصر المحايد في F بالنسبة ل \times في F

(3) كل عنصر $M(x, y)$ من F يقبل $M(\frac{1}{x}, -y)$ مُماثل له بالنسبة ل \times في F

(4) \times غير تبادلي في F ، لدينا مثال مُضاد :

$$M(1, 1) \times M(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M(2, 3) \times M(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ و}$$

$$M(1, 1) \times M(2, 3) \neq M(2, 3) \times M(1, 1) \text{ ومنه}$$

2 - لتكن $G = \{M(x, 0) \in F / x \in \mathbb{R}^*\}$ نبين أن G زمرة جزئية من (F, \times)

(1) لدينا $G \neq \emptyset$ لأن $I \in G$

(2) ليكن x و a من \mathbb{R}^* لدينا : $M(x, 0) \times M(a, 0)^{-1} = M(x, 0) \times M(\frac{1}{a}, 0) = M(\frac{x}{a}, 0)$

3 - ليكن $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

نُزود E بقانون التركيب الداخلي \perp $(x, y) \perp (a, b) = (xa, xb + \frac{y}{a})$

نعتبر التطبيق : $\phi : (F, \times) \mapsto (E, \perp)$
 $M(x, y) \mapsto (x, y)$

$$(1, 1) \perp (2, 3) = (2, \frac{7}{2}) \text{ و } (2, 3) \perp (1, 1) = (2, 5) \text{ أ}$$

ب) (1) نبين ان ϕ تشاكل : لتكن $M(x, y)$ و $M(a, b)$ عنصرين من F ; لدينا

$$\phi(M(x, y) \times M(a, b)) = \phi(M(xa, xb + \frac{y}{a}))$$

ولدينا كذلك من جهة ثانية

$$\phi(M(xa, xb + \frac{y}{a})) = (xa, xb + \frac{y}{a}) = (x, y) \perp (a, b) = \phi(M(x, y)) \perp \phi(M(a, b))$$

$$\phi(M(x, y) \times M(a, b)) = \phi(M(x, y)) \perp \phi(M(a, b))$$

(2) لنبين ان ϕ تقابل :

كل زوج (x, y) من E يحدد مصفوفة وحيدة $M(x, y)$ من F بحيث $\phi(M(x, y)) = (x, y)$
 (ج) من السؤال السابق نستنتج ان (E, \perp) و (F, \times) لهما نفس البنية الجبرية , إذن (E, \perp) زمرة غير تبادلية

التمرين الثاني : الأعداد العقديّة

m عدد عقديّ بحيث $m \neq 1$

$-I$ نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $(E) : z^2 - (1 - i)(1 + m)z - i(m^2 + 1) = 0$

$$\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2 - 4i(m^2 + 1)$$

$$\Delta = [(1 - i)(1 + m)]^2 + 4i(m^2 + 1)$$

فإن $(1 + i)^2 = 2i$ و $(1 - i)^2 = -2i$ بمأن

$$\Delta = 2i(m^2 - 2m + 1) = (1 + i)^2(m - 1)^2 = [(1 + i)(m - 1)]^2$$

(ب) لنحل في \mathbb{C} المعادلة (E)

E تقبل حلين هما $z_1 = \frac{(1 - i)(1 + m) - (1 + i)(m - 1)}{2} = 1 - im$ و

$$z_2 = \frac{(1 - i)(1 + m) + (1 + i)(m - 1)}{2} = m - i$$

$$(ج) z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow (1 - im)(m - i) = 1 \Leftrightarrow -i(m^2 + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 1 = i \Leftrightarrow m^2 = -1 + i$$

نضع $m = x + iy$ المتساوية $m^2 = -1 + i$ تصبح تكافئ النظمة (S) التالية :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$m = -\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}}\right] \text{ أو } m = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}}$$

-2 في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, لدينا :

$$z_1 = 1 - im = 1 + e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} (e^{-i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}) = 2 \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}$$

ومنه $0 < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ فإن $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ بمأن

$$z_1 = 2 \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) \left(\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) \right)$$

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} \right)$$

و بمأْن $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فإن $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$ ومنه

$$z_2 = 2e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4})} \cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) = 2 \cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \left(\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{4}) \right)$$

II نعتبر النقط $M_2(z_2)$ و $M_1(z_1)$, $M(m)$

1 تكون النقط M_2, M_1, M مستقيمة إذاً فقط إذا كان $\frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R}$ أي $\frac{1 - im - m}{-i} \in \mathbb{R}$ أي $i + m - im \in \mathbb{R}$

نضع $m = x + iy$ مع $(x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (1, 0))$ ومنه مجموعة النقط M بحيث M_2, M_1, M مستقيمة هي التي تحقق $i + x + iy - i(x + iy) \in \mathbb{R}$ أي $1 + y - x = 0$ أي مستقيم معادلته $A(1, 0)$ محروم من النقطة $1 + y - x = 0$

2- أ) لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $z' = 1 - iz$

لدينا التحويل R يقبل نقطة صامدة لحقها ω يحقق $\omega = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ ومنه $\omega = 1 - i\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

$$\forall z \in \mathbb{C}, z \neq \omega, \frac{z' - \omega}{z - \omega} = -i. \text{ ومنه } z' = 1 - iz \Leftrightarrow z' - \omega = -i(z - \omega)$$

لتكن Ω النقطة ذات اللّجق $\omega = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ نستنتج ان $\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}$ إذن دوران مركزه Ω و قياس زاويته $-\frac{\pi}{2}$

ب) نضع $m = x + iy$,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{m - i - 1 + im}{m - i - m} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i(x + iy - i - 1 + ix - y) \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow -y + 1 - x = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1$$

ج) لدينا $z_1 = 1 - im \Rightarrow R(M) = M_1$ ومنه المثلث ΩMM_1 قائم الزاوية في Ω ومنه توجد دائرة (C) وحيدة تمر من M, M_1 و Ω بحيث $[MM_1]$ قطر فيها، وهي الدائرة المحيطة بالمثلث ΩMM_1 .

ومنه تكون النقط Ω, M, M_1 و M_2 متداورة يكافئ $M_2 \in (C)$ يكافئ $M_2 MM_1$ قائم الزاوية في

$$M_2 \text{ يكافئ } \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right) \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ يكافئ } \overrightarrow{M_2 M}, \overrightarrow{M_2 M_1} \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

يكافئ حسب السؤال السابق $\text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1$

إذن مجموعة النقط $M(m)$ التي تحقق Ω, M, M_1 و M_2 متداورة هي المستقيم الذي معادلته

$$A(1, 0): x + y - 1 = 0$$

التمرين الثالث: الحسابيات

لكل n من \mathbb{N}^* نضع: $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1 أ) لتتحقق من انه لكل n من \mathbb{N}^* عدد زوجي

$$2 \equiv 0[2] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \equiv 0[2]$$

$$3 \equiv 1[2] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 3^n \equiv 1[2]$$

$$6 \equiv 0[2] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 6^n \equiv 0[2]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0[2] \text{ ومنه}$$

إذن لكل n من \mathbb{N}^* عدد زوجي

$$2 \equiv -1[3] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \equiv (-1)^n[3] \quad a_n \equiv 0[3] \text{ ب) لئحدد قيم } n \text{ التي يكون من أجلها}$$

$$3 \equiv 0[3] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 3^n \equiv 0[3]$$

$$6 \equiv 0[0] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 6^n \equiv 0[3]$$

$$\text{ومنه } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv 0[3] \text{ إذا فقط إذا كان } n \text{ عدد زوجي}$$

-2 ليكن p عدداً أولياً بحيث $p > 3$

أح بما أن $p > 3$ و p أولي فإن $p \bar{\wedge} 2 = p \bar{\wedge} 3 = 1$ و $p \bar{\wedge} 6 = 1$ فإنه حسب مبرهنة (Fermat)

$$6^{p-1} \equiv 1[p] \text{ و } 2^{p-1} \equiv 1[p], 3^{p-1} \equiv 1[p]$$

بهلدينا $6a_{p-2} = 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$ من السؤال السابق نستنتج ان

$$6a_{p-2} = 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0[p]$$

ومنه $p/6a_{p-2}$ و بما أن $p \bar{\wedge} 6 = 1$ فإن حسب مبرهنة (GAUSS) p/a_{p-2}

ج) ليكن q عدداً أولياً

الحالة I : $q = 2$ من السؤال -1 أح $\forall k \in \mathbb{N}^*, q/a_k = 1$ و $a_k \bar{\wedge} q = q$ ومنه $n = k$

الحالة II : $q = 3$ من السؤال -1 ب) $\forall k \in \mathbb{N}^*, q/a_{2k} = 1$ و $a_{2k} \bar{\wedge} q = q$ ومنه $n = 2k$

الحالة III : $q > 3$ من السؤال -2 ب) $q/a_{q-2} = 1$ و $a_{q-2} \bar{\wedge} q = q$ ومنه $n = q - 2$

مسألة : التحليل

ليكن n من \mathbb{N}^* نعتبر الدالة $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بما يلي $f_n(x) = x(1 - \ln(x))^n$: إذا كان

$$f_n(0) = 0 \text{ و } x > 0$$

(C_n) منحناها في معلم متعامد مُنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

الجزء الأول

-1 أح إتصال f_n على اليمين في الصفر

$$f_n(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$$

على

نحصل

$$t^n = x$$

بوضع

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^n (1 - n \ln(t))^n = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t - nt \ln(t))^n = 0 = f_n(0)$$

ب) قابلية اشتقاق f_n على اليمين في الصفر

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} \text{ لنحسب}$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln(x))^n = +\infty$ لأن $\lim_{t \rightarrow 0^+} -\ln(t) = +\infty$ إذن f_n غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln(x)) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x)) = -\infty \quad \text{ج}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln(x))^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x))^2 = +\infty$$

2- أ) تغيرات f_1

لدينا f_1 قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}_+^* و $\forall x > 0, f_1'(x) = 1 - \ln(x) - 1 = -\ln(x)$

جدول تغيرات f_1

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	-	
$f_1(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

2- ب) تغيرات f_2

لدينا f_2 قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}_+^* و

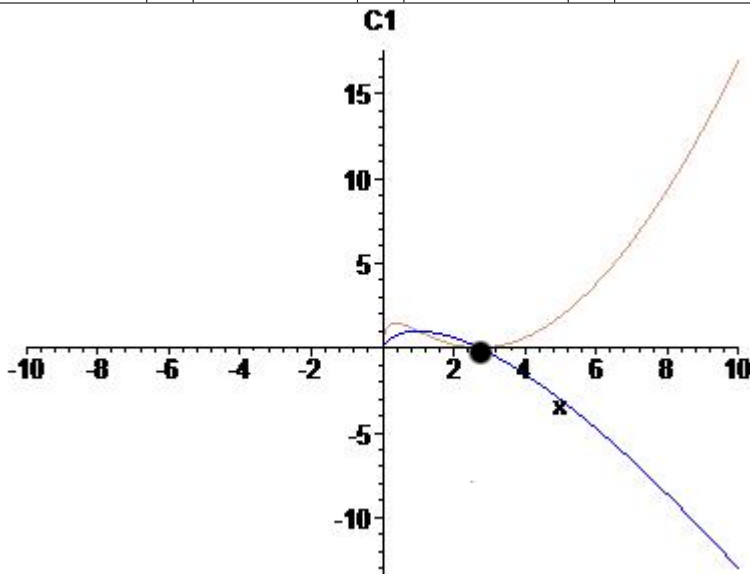
$$\forall x > 0, f_2'(x) = (1 - \ln(x))^2 - 2x \frac{1}{x} (1 - \ln(x)) = (\ln(x) - 1)(1 + \ln(x))$$

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$f_2'(x)$		+	0	-	0	+	
$f_2(x)$	0	↗	$4e^{-1}$	↘	0	↗	$+\infty$

3- أ) دراسة الوضع النسبي ل (C_1) و (C_2) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_1(x) - f_2(x) = x(1 - \ln(x))(1 - 1 + \ln(x)) = x \ln(x)(1 - \ln(x))$$

x	0		1		e		$+\infty$
$f_1(x) - f_2(x)$	0	-	0	+	0	-	
الوضع النسبي		C_1 فوق C_2		C_2 فوق C_1		C_1 فوق C_2	



الجزء الثاني

$$\forall x \leq 0, F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt \text{ بحيث } F$$

أج ألدالة $t \mapsto \frac{f_1(t)}{1+t^2}$ متصلة على $[0, +\infty[$ و الدالة $u : x \mapsto e^x$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty, 0[$ و $[0, +\infty[\cap]-\infty, 0[=]-\infty, 0[$ و منه F قابلة للإشتقاق على $]-\infty, 0[$ و ان

$$\forall x < 0, F'(x) = -e^x \frac{(f(e^x))}{1+e^{2x}} = -\frac{e^x e^x (1 - \ln(e^x))}{1+e^{2x}} = \frac{e^{2x}(x-1)}{1+e^{2x}}$$

ب) F تناقصية على $]-\infty, 0[$

2- أج ليكن x من $]-\infty, 0[$ لدينا $2 \geq 1+t^2 \geq 1+e^{2x}$ و $0 \leq f_1(t)$ ومنه

$$\forall t \in [e^x, 1], \frac{1}{2} f_1(t) \leq \frac{1}{1+t^2} f_1(t) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} f_1(t)$$

$$\int_{e^x}^1 \frac{1}{2} f_1(t) dt \leq \int_{e^x}^1 \frac{1}{1+t^2} f_1(t) dt \leq \int_{e^x}^1 \frac{1}{1+e^{2x}} f_1(t) dt$$

$$\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$$

أي

$$\left(x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln(x)}{2} \right) \right)' = f_1(x) \text{ لدينا }]-\infty, 0[\text{ لكل } x$$

$$\int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \left[t^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln(t)}{2} \right) \right]_{e^x}^1 = \frac{3}{4} - e^{2x} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2} \right) = 0 \text{ و بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$$

$$3- \text{ من السؤال } 2- \text{ ب) نستنتج ان } \frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$$

الجزء الثالث

$$u_n = \int_1^e f_n(t) dt \text{ نضع } \mathbb{N}^*$$

$$1- \text{ أج ليكن } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ لدينا } \forall x \in [1, e], f_n(x) \geq 0 \text{ ومنه } u_n = \int_1^e f_n(t) dt \geq 0$$

ب) ليكن x من $[1, e]$ لدينا

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x(1 - \ln(x))^n (1 - \ln(x) - 1) = -x \ln(x) (1 - \ln(x))^n$$

لدينا

و

$$1 \leq x \leq e \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \ln(x) \\ 0 \leq 1 - \ln(x) \\ 0 \leq (1 - \ln(x))^n \end{cases}$$

$$\forall x \in [1, e], f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0 \text{ ومنه}$$

ج) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ من السؤال السابق بمكاملة متفاوتة $f_{n+1} - f_n \leq 0$ على $[1, e]$ نحصل على

$$u_{n+1} \leq u_n$$

د) (u_n) مصغورة بالصفير حسب (1-أ) و تناقصية حسب (1-ب)

$$u'(x) = x, \quad v(x) = (1 - \ln(x))^{n+1} \quad \text{نضع} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \text{ليكن} \quad \text{أح} \quad -2$$

$$u(x) = \frac{x^2}{2}, \quad v'(x) = -(n+1) \frac{(1 - \ln(x))^n}{x}$$

$$\text{ومنه} \quad u_{n+1} = \int_1^e x(1 - \ln(x))^n dx = \left[\frac{x^2}{2} (1 - \ln(x))^{n+1} \right]_1^e + \frac{(n+1)}{2} \int_1^e x(1 - \ln(x))^n dx$$

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n$$

ب) لتكن A مساحة حيز المستوى المحصور بين C_1 و C_2 و المستقيمين الذين معادلتهم على التوالي $x = e$ و $x = 1$ بالسنتمتر .

$$A = \int_1^e |f_2(x) - f_1(x)| dx \times 4cm^2 = u_1 - u_2 \times 4cm^2$$

$$A = 2cm^2 \quad \text{ولدينا حسب} \quad (أح -2) \quad u_1 - u_2 = \frac{1}{2}$$

$$-3 \quad \text{أح} \quad \text{لكل} \quad n \geq 2 \quad \text{حسب} \quad (أح -2) \quad u_n - \frac{1}{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1 = 2u_{n+1} \quad \text{وبما أن حسب} \quad (أح -1) \quad u_{n+1} \geq 0 \quad \text{فإن} \quad u_n - \frac{1}{n+1} \geq 0 \quad \text{إذن} \quad u_n \geq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{ولدينا لكل} \quad n \geq 2 \quad \text{حسب} \quad (أح -2) \quad 2u_{n+1} + 1 = (n+1)u_n \quad \text{و بما أن} \quad (u_n) \quad \text{تناقصية فإن} \quad 2u_{n+1} + 1 \leq 2u_n + 1 \quad \text{ومنه} \quad (n+1)u_n \leq 2u_n + 1 \quad \text{ومنه} \quad u_n \leq \frac{1}{n-1} \quad \text{وبالتالي} \quad \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

ب) من السؤال السابق نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

$$-4 \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{بحيث} \quad a \neq u_1 \quad v_1 = a; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} v_n, \quad \text{و} \quad \forall n \geq 1, d_n = |v_n - u_n|$$

$$\forall n \geq 1, d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1 \quad \text{أن} \quad \text{لنبرهن بالترجع أن} \quad d_1 = d_1 : n = 1$$

$$\text{ليكن} \quad n \geq 1 \quad \text{نفترض} \quad \text{أن} \quad d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1 \quad \text{لدينا}$$

$$d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}| = \frac{(n+1)}{2} |v_n - u_n| = \frac{(n+1)}{2} d_n = \frac{(n+1)!}{2^n} d_1$$

$$\text{ب) من السؤال السابق نستنتج أن} \quad \forall n \geq 1 : \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{n+1}{2} \quad \text{ومنه} \quad d_n \geq 2^{(n-3)} d_3 \quad \text{وبما أن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{(n-3)} d_3 = +\infty$$

ج) إذ كانت (v_n) متقاربة وعلما أن (u_n) متقاربة و $d_n = |v_n - u_n|$ فإن (d_n) ستكون متقاربة و هذا تناقض