تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم الرياضية ، الإمتحان الوطني دورة يونيو 2010


تقديـــم : ذ. الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش


==================================================================

# التمرين 1 :

## الجزء الأول

**1. . نبين أن * تبادلي في I :**

ليكن $a$ و $b$ عنصرين من $I$ .

لدينا : $a*b=e^{\ln a.\ln b}=e^{\ln b.\ln a}=b*a$

إذن : $a*b=b*a$ لكل $a$ و $b$ من $I$ .

ومنه : $*$ تبادلي في $I$.

**. نبين أن * تجميعي في I :**

لتكن a و b و c عناصر من $I$ .

*لدينا :* $(a*b)*c=e^{\ln a.\ln b}*c=e^{(\ln a.\ln b).\ln c}=e^{\ln a.(\ln b.\ln c)}=a*e^{\ln b.\ln c}=a*(b*c)$

*ومنه لكل* a و b و c من $I$ : $(a*b)*c=a*(b*c)$.

*وبالتالي :* $*$ *تجميعي في* $I$.

**2.نبين أن القانون * يقبل عنصرا محايدا :**

القانون $*$ تبادلي في $I$

ومنه $\varepsilon$ عنصر محايد بالنسبة للقانون * *في* **I** *يكافئ* $(\forall a\in I):\ a*\varepsilon=a$

لدينا :

$$\begin{aligned}(\forall a\in I)\ :\ a*\varepsilon=a &\Leftrightarrow (\forall a\in I):\ e^{\ln a.\ln\varepsilon}=a\\ &\Leftrightarrow (\forall a\in I):\ln a.\ln\varepsilon=\ln a\\ &\Leftrightarrow (\forall a\in I):\ (\ln\varepsilon-1).\ln a=0\\ &\Leftrightarrow \ln\varepsilon=1\\ &\Leftrightarrow \varepsilon=e\end{aligned}$$

ومنه : * يقبل عنصرا محايدا في $I$ وهو العدد **e** .

**3.أ. نبين ان $(I-\{1\},*)$ زمرة تبادلية .**

القانون * تبادلي وتجميعي في $I$ .

إذن * تبادلي وتجميعي في $I-\{1\}$ .

ولدينا : $(\forall a\in I-\{1\})\ :\ a*\varepsilon=a$

إذن $\varepsilon$ عنصر محايد بالنسبة للقانون * *في* $I-\{1\}$.

ليكن a عنصرا من $I-\{1\}$ .

العدد b مماثل a في $I-\{1\}$ بالنسبة للقانون * يكافئ $a*b=e$ ( القانون * تبادلي في I )

يكافئ $e^{\ln a.\ln b}=e$

يكافئ $\ln b=\dfrac{1}{\ln a}$


wadiiifi@hotmail.com

يكافئ $b=e^{1/\ln a}$

*كل عنصر من* $I-\{1\}$ يقبل مماثلا في $I-\{1\}$. ( وحيدا بحكم تجميعية القانون * )

وعليه فإن $(I-\{1\},*)$ زمرة تبادلية .

**3.ب. نبين أن $]1,+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I-\{1\},*)$.**

المجموعة $]1,+\infty[$ غير فارغة ( تحتوي على **2010** سنة الباكالوريا ).

ليكن $a$ و $b$ عنصرين من $]1,+\infty[$ . $b'$ مماثل $b$ في $]1,+\infty[$

لدينا :

$$a*b'=a*e^{\frac{1}{\ln b}}=e^{\ln a.\ln e^{\frac{1}{\ln b}}}=e^{\frac{\ln a}{\ln b}}$$

ولدينا $\ln a$ و $\ln b$ من $]0,+\infty[$ فإن $1\prec a*b'$

إذن لكل عنصرين $a$ و $b$ من $]1,+\infty[$ : $a*b'\in I$

ومنه : $]1,+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I-\{1\},*)$.

**4.أ. نبين أن القانون * *توزيعي بالنسبة للقانون* $\times$ :**

لتكن a و b و c عناصر من $I$ .

*لدينا :*

$$a*(b\times c)=e^{\ln a.\ln b\times c}=e^{\ln a.(\ln b+\ln c)}=e^{(\ln a.\ln b)+(\ln a.\ln c)}=e^{\ln a.\ln b}\times e^{\ln a.\ln c}=(a*b)\times(a*c)$$

*ومنه لكل* a و b و c عناصر من I : $a*(b\times c)=(a*b)\times(a*c)$

*وبالتالي * توزيعي بالنسبة للقانون* $\times$ . ( * *تبادلي في* $I$ )

**4.ب. نبين أن $(I,\times,*)$ جسم تبادلي :**

واضح أن القانون $\times$ تجميعي ، تبادلي ويقبل عنصرا محايدا وهو **1** في $I$ و كل عنصر ***a*** من $I$ يقبل عنصرا مقلوبا وهو $\frac{1}{a}$

وبالتالي . $(I,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو **1**.

ولدينا . $(I-\{1\},*)$ زمرة.

.القانون * توزيعي بالنسبة للقانون $\times$ .

.القانون * تبادلي في $I$ .

ومنه $(I,\times,*)$ جسم تبادلي .

## الجزء الثاني :

**1. نحسب $A^2$ و $A^3$ :**

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&0\\-4&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

**2.نبين أن A لا يقبل مقلوبا :**

نفترض أن A يقبل مقلوبا B .

ومنه $A.B=I$

وبالتالي : $A^2\times A\times B=A^2$ أي $A^2=0$ وهذا غير صحيح .

ومنه A لا يقبل مقلوبا .(لاحظ أن A قاسم للصفر ).

wadiiifi@hotmail.com

## التمرين 2 :

**1.أ. نحدد الجذرين المربعين للعدد $3+4i$ :**

لدينا :

$$3+4i=4+3i-1$$
$$=(2+i)^2$$

ومنه :

| |
|---|
| الجذران المربعان للعدد العقدي $3+4i$ هما : $2+i$ و $-2-i$ |

**1.ب. نحل في C المعادلة : $(E)\quad 4z^2-10iz-7-i=0$**

المميز المختصر للمعادلة $(E)$ هو $\Delta'=3+4i$

ومنه:

| |
|---|
| حلي المعادلة هما : $\frac{-1}{2}+i$ و $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ . |

**.2**

بما أن $\mathrm{Re}(a)\prec 0$ فإن $a=\frac{-1}{2}+i$ و $b=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

**2.أ. نتحقق أن : $\frac{b}{a}=1-i$**

( تعويض مباشر ) .

**2.ب.نستنتج أن المثلث AOB قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .**

لدينا :

$$\frac{a-b}{a-0}=1-\frac{b}{a}$$
$$=1-(1-i)$$
$$=i$$

أي : $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_O}=i$

ومنه :

| |
|---|
| المثلث AOB قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A . |

**3.أ. نحدد لحق D :**

لدينا D صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$ .

إذن : $z_D-z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}.(z_B-z_C)$

ومنه :

| |
|---|
| $d=i\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i-c\right)+c$ |

wadiiifi@hotmail.com

**3.ب . نحدد لحق L :**

بما أن L صورة D بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AO}$

فإن $z_L = z_D + z_{\overrightarrow{AO}}$

أي :

$$\boxed{l = -1 - \frac{1}{2}i - ic + c}$$

**3.ج. نحدد الكتابة الجبرية للعدد $\dfrac{l-c}{a-c}$**

لدينا :

$$\frac{l-c}{a-c} = \frac{-1-\frac{1}{2}i - ic}{-\frac{1}{2} + i - c}$$

$$= \frac{i\left(i - \frac{1}{2} - c\right)}{\frac{-1}{2} + i - c}$$

$$= i$$

**نستنتج أن**

لدينا $\dfrac{l-c}{a-c} = i$ و $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

إذن $\left\|\dfrac{l-c}{a-c}\right\| = 1$ و $\arg\left(\dfrac{l-c}{a-c}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

وبالتالي : $LC = AC$ و $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CL}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

ومنه :

| |
|---|
| المثلث ACL قائم الزاوية ومتساوي الساقين في C . |

---

## التمرين الثالث :

**1.نحدد مجموعة الأعداد الطبيعية m حيث $m^2 + 1 \equiv 0 \quad [5]$ :**

لدينا :

$$\begin{aligned}
m^2 + 1 \equiv 0 \quad [5] \quad &\Leftrightarrow \quad m^2 - 4 \equiv 0 \quad [5] \\
&\Leftrightarrow \quad (m-2)(m+2) \equiv 0 \quad [5] \\
&\Leftrightarrow \quad m - 2 \equiv 0 \quad [5] \quad ou \quad m + 2 \equiv 0 \quad [5] \\
&\Leftrightarrow \quad m \equiv 2 \quad [5] \quad ou \quad m \equiv 3 \quad [5]
\end{aligned}$$

wadiiifi@hotmail.com

ومنه :

| |
|---|
| الأعداد الصحيحة الطبيعية m التي تحقق $m^2+1\equiv 0\ [5]$ هي : |
| $m=2+5k$ أو $m=3+5k$ حيث k عدد صحيح طبيعي . |

**2.أ.نبين أن : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\ [p]$**

لدينا : $n^2+1\equiv 0\ [p]$

إذن : $n^2\equiv -1\ [p]$

وبالتالي : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv (-1)^{1+2k}\ [p]$

ومنه :

$$\boxed{\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\ [p]}$$

**2ب .نبين أن n و p أوليان فيما بينهما .**

بما أن p عدد أولي

فإن $p\wedge n=1$ أو $p\wedge n=p$

نفترض أن n و p غير أوليين فيما بينهما أي $p\wedge n\neq 1$

وبالتالي $p\wedge n=p$

أي : $p/n$

أي $n\equiv 0\ [p]$

ومنه : $n^2\equiv 0\ [p]$

وحيث أن $n^2\equiv -1\ [p]$

فإن : $-1\equiv 0\ [p]$ وهذا غير ممكن .

ومنه

| |
|---|
| n و p أوليان فيما بينهما . |

**2.ج. نستنتج أن $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1\ [p]$**

لدينا p أولي و $p\wedge n=1$

إذن حسب المحترم فيرما : $n^{p-1}\equiv 1\ [p]$

أي : $n^{2+4k}\equiv 1\ [p]$ لأن $p=3+4k$ .

ومنه :

$$\boxed{\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1\ [p]}$$

**2.د . نفترض وجود عدد طبيعي n حيث $n^2+1\equiv 0\ [p]$.**

إذن : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\ [p]$ و $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1\ [p]$

wadiiifi@hotmail.com

وبالتالي $-1 \equiv 1 \quad [p]$

أي $2 \equiv 0 \quad [p]$

أي $p/2$ وهذا غير ممكن لأن p عدد أولي أكبر من أو يساوي 3.

ومنه :

| |
|---|
| لايوجد عدد طبيعي n حيث $n^2+1 \equiv 0 \quad [p]$. |

---

## التمرين الرابع :

### الجزء الأول :

**1.نحسب نهاية f بجوار $+\infty$**

لدينا.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{e^{x^2}} \cdot \frac{1}{x}$$

نضع $t = x^2$ وبالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t/t}$$

$$= 0$$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

**2.ندرس تغيرات f :**

الدالة $x \mapsto -x^2$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ باعتبارها دالة حدودية .

إذن الدالة $x \mapsto e^{-x^2}$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$.

ولدينا : الدالة $x \mapsto 4x$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ باعتبارها دالة حدودية .

إذن f قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ ( جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال )

ولدينا لكل x من $[0,+\infty[$ :

$$f'(x) = 4e^{-x^2} - 8x^2e^{-x^2}$$

$$= 4e^{-x^2}(1-2x^2)$$

بما أن : $4e^{-x^2} \succ 0$ لكل x من $[0,+\infty[$.

فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-2x^2$ على $[0,+\infty[$.

جدول تغيرات f هو :

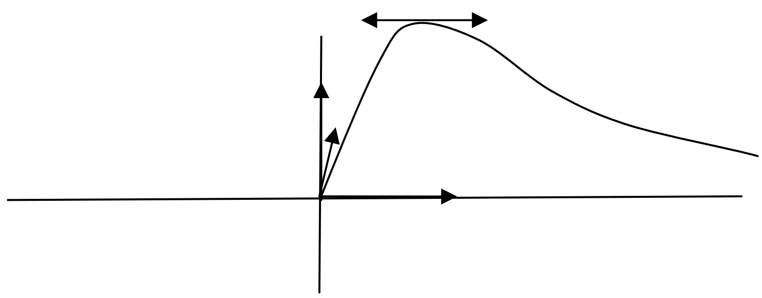
wadiiifi@hotmail.com

| $x$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| f | 0 $\nearrow$ | | $\searrow$ 0 |

**1.معادلة نصف مماس منحنى f في أصل المعلم هي :**

$$\begin{cases} y = f'(0)(x-0)+f(0) \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} y = 4x \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

**التمثيل المبياني لمنحنى f هو :**



**1.حساب التكامل :**

$$\int_0^1 f(x)dx = -2\int_0^1 -2xe^{-x^2}dx$$
$$= -2\left[e^{-x^2}\right]_0^1$$
$$= 2-\frac{2}{e}$$

ومنه :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)dx = 2-\frac{2}{e}}$$

**حساب المساحة :**

نعلم أن مساحة الحيز هي $\int_0^1 |f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة وهي $4cm^2$.

ومنه مساحة الحيز المقترح هي : $\left(8-\frac{8}{e}\right) cm^2$.

## الجزء الثاني :

**1.أ.نبين أن : $e^{-x^2} \prec e^{-x}$ لكل x من $]1,+\infty[$.**

ليكن x عنصرا من $]1,+\infty[$.

إذن $x \prec x^2$

وبالتالي : $-x^2 \prec -x$ أي $e^{-x^2} \prec e^{-x}$

ومنه $e^{-x^2} \prec e^{-x}$ لكل x من $]1,+\infty[$.

**1.ب. نستنتج نهاية $f_n$ عند ما تؤول x إلى $+\infty$.**

wadiiifi@hotmail.com

ليكن x عنصرا من $]1,+\infty[$ .

لدينا : $e^{-x^2} \prec e^{-x}$

إذن : $0 \prec f_n(x) \leq 4x^n e^{-x}$

وحيث أن : $\lim_{x\mapsto+\infty} 4x^n e^{-x} = \lim_{x\mapsto+\infty} 4.\frac{1}{\frac{e^x}{x^n}}$ و $\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ لأن $n \in N^*$.

فإن $\lim_{x\mapsto+\infty} f_n(x) = 0$ ( Le théorème des gendarmes ).

**2.ندرس تغيرات $f_n$ :**

الدالة $f_n$ قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ ... تعليل شبيه للوارد في الجواب على السؤال الثاني في الجزء الأول ....

ولكل x من $[0,+\infty[$ لدينا :

$f_n'(x) = 4x^{n-1}e^{-x^2}\left(n-2x^2\right)$.

جدول تغيرات الدالة $f_n$ هو :

| $x$ | 0 | | $\sqrt{\frac{n}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| f | 0 | ↗ | | ↘ | 0 |

**3. نبين وجود عدد حقيقي وحيد $u_n$ من $]0,1[$ حيث $f_n(u_n) = 1$ .**

لدينا $n \geq 2$ إذن : $\sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1$.

ومنه $\left[0,\sqrt{\frac{n}{2}}\right] \subset [0,1]$.

ولدينا الدالة $f_n$ متصلة وتزايدية قطعا على المجال $\left[0,\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

وبالتالي الدالة $f_n$ متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0,1]$.

ولدينا $f_n(0) \prec 1$ و $f_n(1) \succ 1$.

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، المعادلة $f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا في المجال المفتوح $]0,1[$.

أي أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $u_n$ حيث $f_n(u_n) = 1$.

**4.أ . نبين أن لكل عدد طبيعي $n$ حيث $2 \leq n$ : $f_{n+1}(u_n) = u_n$**

ليكن $n$ عددا طبيعيا حيث $2 \leq n$.

لدينا :

wadiiifi@hotmail.com

$$f_{n+1}(u_n)=4(u_n)^{n+1}.e^{-u_n^2}$$
$$=u_n.4(u_n)^n.e^{-u_n^2}$$
$$=u_n.f_n(u_n)$$

ولدينا : $f_n(u_n)=1$ ،

إذن : $f_{n+1}(u_n)=u_n$ .

ومنه :

| |
|---|
| لكل عدد طبيعي $n$ حيث $2\le n$ : $f_{n+1}(u_n)=u_n$ |

**4.ب. نبين أن $(u_n)$ تزايدية قطعا .**

ليكن $n$ عددا طبيعيا حيث $2\le n$.

لدينا : $f_{n+1}(u_n)=u_n$ و $u_n\in]0,1[$

إذن : $f_{n+1}(u_n)\prec 1$

ولدينا : $f_{n+1}(u_{n+1})=1$

إذن : $f_{n+1}(u_n)\prec f_{n+1}(u_{n+1})$ .

وحيث أن الدالة $f_{n+1}$ متصلة وتزايدية قطعا على $]0,1[$ ( تقابل )

فإن $u_n\prec u_{n+1}$

ومنه لكل عدد طبيعي $n$ حيث $2\le n$ : $u_n\prec u_{n+1}$

وهذا يعني أن

| |
|---|
| المتتالية $(u_n)$ تزايدية قطعا . |

**تقارب المتتالية $(u_n)$ :**

المتتالية $(u_n)$ تزايدية قطعا ومكبورة بالعدد **1**

إذن : $(u_n)$ متقاربة .

**5.أ.نبين أن $0\prec l\le 1$**

لدينا $(u_n)$ تزايدية قطعا

إذن فهي مصغورة بحدها الأول $u_2$ .

ومنه لكل عدد طبيعي $n$ حيث $2\le n$ : $u_2\prec u_n\prec 1$

وبالتالي : $u_2\le \lim u_n\le 1$

وحيث أن $0\prec u_2$ فإن $0\prec l\le 1$.

**5.ب.نبين أن لكل عدد طبيعي $n$ حيث $2\le n$ : $-\frac{\ln 4}{n}\prec\ln(u_n)\prec\frac{1}{n}-\frac{\ln 4}{n}$.**

ليكن $n$ عددا طبيعيا حيث $2\le n$.

wadiiifi@hotmail.com

لدينا $f_n(u_n)=1$

إذن : $4(u_n)^n = e^{(u_n)^2}$.

ولدينا $0 \prec u_n \prec 1$

إذن : $1 \prec e^{u_n} \prec e$

أي $1 \prec 4(u_n)^n \prec e$

وحيث أن الدالة ln تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

فإن $0 \prec \ln 4(u_n)^n \prec 1$

ومنه $0 \prec \ln 4 + n\ln u_n \prec 1$

وبالتالي لكل عدد طبيعي $n$ حيث $2 \le n$ : $-\frac{\ln 4}{n} \prec \ln(u_n) \prec \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$.

**5.ج. نستنتج أن $\lim u_n = 1$.**

لدينا لكل عدد طبيعي $n$ حيث $2 \le n$ : $-\frac{\ln 4}{n} \prec \ln(u_n) \prec \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$.

إذن : لكل عدد طبيعي $n$ حيث $2 \le n$ : $e^{\left(-\frac{\ln 4}{n}\right)} \prec u_n \prec e^{\left(\frac{1}{n}-\frac{\ln 4}{n}\right)}$.

وحيث أن : $\lim e^{\left(-\frac{\ln 4}{n}\right)} = \lim e^{\left(\frac{1}{n}-\frac{\ln 4}{n}\right)} = 1$

فإن : $\lim u_n = 1$.

---

## التمرين الخامس :

**1.نبين أن F فردية :**

الدالة F معرفة على $R^*$ ( متماثلة بالنسبة للصفر )

ليكن x من $R^*$،

لدينا : $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

نضع $u = -t$ إذن : $du = -dt$

من أجل $t = -x$ لدينا $u = x$ ومن أجل $t = -2x$ لدينا : $u = 2x$

وبالتالي :

$$F(-x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(1+(-u)^2)}(-du)$$

$$= -\int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(1+u^2)} du$$

$$= -F(x)$$

ومنه : لكل x من $D_F$ : $(-x) \in D_F$ و $F(-x) = -F(x)$.

وهذا يعني أن الدالة F فردية .

wadiiifi@hotmail.co

**2.أ. نتحقق أن لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)$.**

ليكن $x$ عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt \\ &= \int_x^{1}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt+\int_1^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt \\ &= \int_1^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt-\int_1^{x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt \\ &= \varphi(2x)-\varphi(x) \end{aligned}$$

ومنه

لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)$.

**2.ب. نبين أن $F$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم نحسب $F'(x)$ من أجل $0\prec x$**

الدالة $f:t\mapsto\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن الدالة $\varphi$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $\varphi'(x)=f(x)$.

وحيث أن الدالة $x\mapsto 2x$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ وتأخذ قيمها في $]0,+\infty[$

فإن الدالة $F$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لكل $x$ من $]0,+\infty[$ لدينا :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2f(2x)-f(x) \\ &= 2.\frac{1}{\ln(1+4x^2)}-\frac{1}{\ln(1+x^2)} \\ &= \frac{2\ln(1+x^2)-\ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2).\ln(1+x^2)} \end{aligned}$$

**2.ج.نستنتج منحى تغيرات F على المجال $]0,+\infty[$ :**

لدينا : $1+2x^2\succ 0$ و $1+4x^2\succ 0$

إذن : $\ln(1+x^2)\succ 0$ و $\ln(1+4x^2)\succ 0$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة العدد $2\ln(1+x^2)-\ln(1+4x^2)$

ولدينا : لكل $x$ من $]0,+\infty[$

wadiiifi@hotmail.com

$$2\ln(1+x^2)-\ln(1+4x^2)\succ 0 \iff (1+x^2)^2 \succ \ln(1+4x^2)$$
$$\iff x^2\succ 2$$
$$\iff x\succ\sqrt{2}$$

ومنه F تزايدية قطعا على $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$ وتناقصية قطعا على $\left]0,\sqrt{2}\right]$.

**3.أ. نبين أن** $(\forall x\succ 0)\ (\exists x\in\left]x,2x\right[):\ F(x)=\dfrac{x}{\ln(1+c^2)}$

ليكن $x$ عنصرا من المجال $\left]0,+\infty\right[$.

لدينا : $\varphi$ متصلة على المجال المغلق $[x\ ,\ 2x]$ وقابلية للإشتقاق على المجال المفتوح $\left]x,2x\right[$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد c من $\left]x,2x\right[$ حيث : $\varphi(2x)-\varphi(x)=(2x-x)\varphi'(c)$

أي : $F(x)=\dfrac{x}{1+c^2}$.

ومنه $(\forall x\succ 0)\ (\exists x\in\left]x,2x\right[):\ F(x)=\dfrac{x}{\ln(1+c^2)}$

**3.ب. نستنتج أن** $\dfrac{x}{\ln(1+x^2)}\prec F(x)\prec\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل $x$ من $\left]0,+\infty\right[$.

ليكن $x$ عنصرا من المجال $\left]0,+\infty\right[$.

يوجد c من $\left]x,2x\right[$ حيث : $F(x)=\dfrac{x}{1+c^2}$

ولدينا :
$$x\prec c\prec 2x\Rightarrow \frac{1}{\ln(1+x^2)}\prec\frac{1}{\ln(1+c^2)}\prec\frac{1}{\ln(1+4x^2)}$$
$$\Rightarrow\frac{x}{\ln(1+x^2)}\prec F(x)\prec\frac{x}{\ln(1+4x^2)}$$

إذن : $\dfrac{x}{\ln(1+x^2)}\prec F(x)\prec\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل $x$ من $\left]0,+\infty\right[$.

**3.ج. نحددالنهايات :**

لدينا . $\dfrac{x}{\ln(1+x^2)}\prec F(x)\prec\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل $x$ من $\left]0,+\infty\right[$.

$$\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{x}{\ln(1+4x^2)}=\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{1}{4x}\,\frac{4x^2}{\ln(1+4x^2)}$$

wadiiifi@hotmail.com

ولدينا $\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{4x^2}{\ln(1+4x^2)} = 1$ ( يمكنك وضع $t=4x^2$)

إذن $\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = +\infty$

إذن : $\lim_{x\mapsto 0^+} F(x) = +\infty$

لدينا .

$$\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x}{\ln x^2 + \ln\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{1}{2+\frac{\ln\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}}$$

$$= +\infty$$

وحيث أن : $F(x) \succ \frac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ .

فإن $\lim_{x\mapsto +\infty} F(x) = +\infty$

لدينا. $\frac{x}{\ln(1+x^2)} \succ F(x) \succ \frac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ .

إذن : $\frac{1}{\ln(1+x^2)} \succ \frac{F(x)}{x} \succ \frac{1}{\ln(1+4x^2)}$

وحيث أن $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{1}{\ln(1+4x^2)} = \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = 0$

فإن : $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

**3.د.نتحقق أن $\sqrt{e-1} \succ F\left(\sqrt{e-1}\right)$ و $F\left(\frac{\sqrt{e}-1}{2}\right) \succ \sqrt{\frac{e-1}{2}}$ :**

لدينا . $\frac{x}{\ln(1+x^2)} \succ F(x)$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ .

إذن : $\frac{\sqrt{e-1}}{\ln\left(1+\sqrt{e-1}^2\right)} \succ F\left(\sqrt{e-1}\right)$

وبالتالي : $\sqrt{e-1} \succ F\left(\sqrt{e-1}\right)$

wadiiifi@hotmail.com

. لدينا $F(x) \prec \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ .

إذن : $f\left(\sqrt{\dfrac{e-1}{2}}\right) \prec \dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\dfrac{1}{\ln\left(1+4\sqrt{e-1}^2\right)}$

وبالتالي : $F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right) \prec \sqrt{\dfrac{e-1}{2}}$

**استنتاج :** نعتبر الدالة العددية **H** المعرفة بمايلي : $H(x)=F(x)-x$

الدالة **H** متصلة ، قابلة للإشتقاق وتناقصية قطعا على المجال $\left]0,\sqrt{e-1}\right[$

إذن **H** تقابل من المجال $\left]0,\sqrt{e-1}\right[$ نحو صورته بالدالة **H** الذي يحتوي على الصفر

ومنه يوجد سابق وحيد للصفر في المجال $\left]0,\sqrt{e-1}\right[$.

أي أن المعادلة $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]0,\sqrt{e-1}\right[$

ولدينا : $H\left(\sqrt{\dfrac{e-1}{2}}\right).H\left(\sqrt{e-1}\right)\prec 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، المعادلة $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $I=\left[\sqrt{\dfrac{e-1}{2}}\ ,\ \sqrt{e-1}\right]$

$\left[\sqrt{e-1}\ ,+\infty\right[$

ولدينا لكل x من

$$x \succ \sqrt{e-1} \Rightarrow \ln\left(1+x^2\right)\succ 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln\left(1+x^2\right)} \prec x$$

$$\Rightarrow F(x) \prec x$$

$$\Rightarrow H(x) \neq 0$$

وبالتالي لا يوجد حل للمعادلة خارج المجال $I=\left[\sqrt{\dfrac{e-1}{2}}\ ,\ \sqrt{e-1}\right]$

$]0,+\infty[$

ومنه المعادلة تقبل حلا وحيدا في المجال

مع متمنياتي لكم بالتوفيق

*wadiiifi@hotmail.com*