

## تقديم: ذ. العربي الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

## التمرين الأول :

(1) نبين أن  $A^{2k} = I$  ( $\forall k \in \mathbb{N}$ )

نستعمل الإستدلال بالترجع

من أجل  $k = 0$  لدينا  $A^0 = I$  (معطيات)ليكن  $k$  من  $\mathbb{N}$ .نفترض أن  $A^{2k} = I$ . لنبين أن :  $A^{2(k+1)} = I$ لدينا :  $A^{2(k+1)} = A^{2k} \times A^2$ .وبما أن  $A^{2k} = I$ 

http://www.vrac-colorpages.net

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & 0 \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{و}$$

فإن :  $A^{2(k+1)} = I \times I = I$ ومنه :  $A^{2k} = I$  ( $\forall k \in \mathbb{N}$ )(2) نبين أن المصفوفة  $A$  تقبل مقلوبا  $A^{-1}$  ونحدد  $A^{-1}$  :لدينا  $A^2 = I$  أي  $A \times A = I$ 

ومنه

المصفوفة  $A$  تقبل مقلوبا  $A^{-1}$  ولدينا  $A^{-1} = A$ .

## الجزء الثاني :

(1) أنبين أن \* قانون تركيب داخلي في  $I$  :ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $I$ . لنبين أن  $x * y$  عنصر من  $I$ .لدينا :  $x \in I$  و  $y \in I$  إذن  $x - a > 0$  و  $y - b > 0$ وبالتالي  $(x - a)(y - a) + a > a$  أي  $x * y > a$  ومنه  $x * y \in I$ .وعليه فإن لكل  $x$  و  $y$  من  $I$  لدينا  $x * y \in I$ .

ومنه

\* قانون تركيب داخلي في  $I$ .

(1) بنبين أن \* قانون تبادلي :

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $I$ .لدينا  $x * y = (x - a)(y - a) + a = (y - a)(x - a) + a = y * x$ ومنه :  $x * y = y * x$  لكل  $x$  و  $y$  من  $I$ . وبالتالي :

\* قانون تبادلي .

**نبيّن أن \* تجميعي :**

x و y و z عناصر من I .  
لدينا :

$$\begin{aligned}
 (x * y) * z &= (x * y - a)(z - a) + a \\
 &= ((x - a)(y - a) + a - a)(z - a) + a \\
 &= ((x - a)(y - a))(z - a) + a \\
 &= (x - a)[(y - a)(z - a)] + a \\
 &= (x - a) \left[ \underbrace{(y - a)(z - a) + a - a}_{y * z} \right] + a \\
 &= (x - a)[(y * z) - a] + a \\
 &= x * (y * z)
 \end{aligned}$$



ومنه  $(x * y) * z = x * (y * z)$  لكل x و y و z من I  
وبالتالي

القانون \* تجميعي .

**1) ج-نبيّن ان القانون \* يقبل عنصرا محايدا .**

إذا كان e هو العنصر المحايد للقانون \* في I فإن  $(\forall x \in I): x * e = x$  ( \* تبادلي )

$$(\forall x \in I): (x - a)(e - a) + a = x \quad \text{يكافئ}$$

$$(\forall x \in I): (e - a)x - a(e - a) + a = x \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{cases} e - a = 1 \\ -a(e - a) + a = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$e = 1 + a \quad \text{يكافئ} \\ \text{ومنه}$$

$(I, *)$  يقبل عنصرا محايدا وهو  $e = 1 + a$ .

**2) نبيّن أن  $(I, *)$  زمرة تبادلية :**

ليكن x و x' عنصرا من I .

$$x * x' = e \Leftrightarrow (x - a)(x' - a) + a = 1 + a$$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{1}{x - a} + a \quad (x > a) \quad \text{لدينا}$$

ولدينا  $x' > a$

$$\text{ومنه لكل } x \text{ من } I \text{ مماثلا في } I \text{ وهو } \frac{1}{x - a} + a$$

وبما أن \* قانون تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا في I .  
فإن

$(I, *)$  زمرة تبادلية .

**3) نبيّن أن  $\varphi$  تشاكل من  $(I, *)$  نحو  $(R_+^*, \times)$  :**

ليكن x و y عنصرين من I .

$$\varphi(x * y) = \frac{1}{x * y - a} = \frac{1}{(x - a)(y - a) + a - a} = \frac{1}{x - a} \times \frac{1}{y - a} = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

ومنه لكل x و y من I لدينا  $\varphi(x * y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

وبالتالي



http://www.vrac-colorpages.net

$\varphi$  تشاكل من  $(I, *)$  نحو  $(R_+, \times)$ .



<http://www.vrac-colorages.net>

نبين أن  $\varphi$  تقابل من  $I$  نحو  $R_+^*$ .

ليكن  $y$  عنصرا من  $R_+^*$ .

لدينا :

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x-a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{y} + a$$

بما أن  $y > 0$  فإن  $\frac{1}{y} + a > a$  أي أن  $x \in I$

ومنه لكل  $y$  من  $I$  يوجد عنصروا  $x$  في  $I$  حيث  $\varphi(x) = y$  وعليه فإن

$\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(I, *)$  نحو  $(R_+^*, \times)$

(3) ب-نحل في المجموعة  $I$  المعادلة  $x^{(3)} = a^3 + a$

لدينا  $x^{(3)} = a^3 + a \Leftrightarrow \varphi(x^{(3)}) = \varphi(a^3 + a)$  لأن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(I, *)$  نحو  $(R_+^*, \times)$  ومنه

$$x^{(3)} = a^3 + a \Leftrightarrow \varphi(x * x * x) = \varphi(a^3 + a)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) \times \varphi(x) \times \varphi(x) = \varphi(a^3 + a)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{x-a} \right)^3 = \frac{1}{a^3 + a - a}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{x-a} \right)^3 = \frac{1}{a^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-a} = \frac{1}{a} \quad (a > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 2a$$



<http://www.vrac-colorages.net>

ومنه

المعادلة تقبل حلا وحيدا وهو  $2a$

التمرين الثاني :

(1) نبين ان  $N$  يقبل القسمة على 11 :

لدينا العدد  $N$  ممثل في نظمة العد العشري إذن :  $N = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2009}$  نستنتج أن العدد  $N$  هو مجموع حدود متتابعة لممتالية هندسية أساسها 10.

ومنه حسب صيغة المجموع :  $N = \frac{10^{2010} - 1}{10 - 1}$

ولدينا  $10 \equiv -1 [11]$  إذن  $10^{2010} \equiv (-1)^{2010} [11]$  أي  $10^{2010} \equiv 1 [11]$ .

وبالتالي  $10^{2010} - 1 \equiv 0 [11]$

وحيث أن  $9 \wedge 11 = 1$  فإن  $[11] \equiv 0$  .  $\frac{10^{2010} - 1}{9} \equiv 0$  ( لاحظ أن  $\frac{10^{2010} - 1}{10 - 1}$  عدد طبيعي محترم ! )  
وبالتالي  $[11] \equiv 0$  وهذا يعني أن

$N$  يقبل القسمة على 11.

ملاحظة : لدينا  $[11] \equiv -1$  إذن :

$$\begin{aligned} N &\equiv 1 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{2010} [11] \\ &\equiv \underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \dots - 1 + 1}_{2010 \text{ fois } 1} [11] \\ &\equiv 0 [11] \end{aligned}$$



<http://www.vrac-colorpages.net>

وبالتالي  $N$  يقبل القسمة على 11.

(2) - نتحقق من أن العدد 2011 أولي

الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2011 هي : 2 ، 3 ، 5 ، ... و 43  
بما أن العدد 2011 لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد فإنه أولي .

. من خلال السؤال 1 لدينا  $N = \frac{10^{2010} - 1}{10 - 1}$  إذن :

$$10^{2010} - 1 = 9N$$

(2) ب- نبين أن 2011 يقسم  $9N$  :

لدينا 2011 عدد أولي و  $10 \wedge 2011 = 1$

إذن حسب مبرهنة فيرما الصغرى لدينا :  $[2011] \equiv 1$

وبالتالي :  $[2011] \equiv 0$

وحيث أن  $10^{2010} - 1 = 9N$  فإن  $[2011] \equiv 0$

ومنه :

$$2011 \text{ يقسم } 9N .$$

(2) ج- استنتاج :

لدينا 2011 يقسم  $9N$  و  $9 \wedge 2011 = 1$  إذن 2011 يقسم  $N$  حسب مبرهنة كوص.

(3) نبين أن  $N$  يقبل القسمة على 22121 :

لدينا  $22121 = 11 \times 2011$

وبما أن  $[11] \equiv 0$  و  $[2011] \equiv 0$  و  $11 \wedge 2011 = 1$

فإن  $[11 \times 2011] \equiv 0$

أي  $[22121] \equiv 0$

وهذا يعني أن :

$$\text{العدد } N \text{ يقبل القسمة على } 22121 .$$

التمرين الثالث :

الجزء الأول :

(1) نتحقق من أن  $z_1 = -m + 2$  حل للمعادلة  $(E_m)$  : تعويض

(2) أ- نبين أن :  $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

نعلم أن  $z_1 z_2 = -im^2 - 2(1-i)m + 4$  (جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية)

وبالتالي :

$$z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow -im^2 - 2(1-i)m + 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$$

(2) ب- لنحل في C المعادلة  $im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

المميز المختصر لهذه المعادلة هو  $\delta = (1-i)^2 + 3i = i = \frac{1}{2}(2i) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)\right)^2$

$$m = \frac{-(1-i) + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{i} \quad \text{أو} \quad m = \frac{-(1-i) - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{i} \quad \text{ومنه}$$

وبالتالي :

$$m = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i \quad \text{أو} \quad m = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$$

الجزء الثاني :

(1) أ) نبين ان :

نعتبر النقطة  $I(1)$ .

$$\begin{aligned} S(M) = M' &\Leftrightarrow z' - 1 = -(z - 1) \\ &\Leftrightarrow z_{M'} - z_I = -(z_M - z_I) \quad \text{لدينا} \\ &\Leftrightarrow z_{\overline{M'}} = -z_{\overline{M}} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM} \end{aligned}$$

وبالتالي

S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة  $I(1)$

(1) ب) نبين ان  $z'' = iz + 2$

$$\begin{aligned} M'' = R(M) &\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 - i) + 1 + i \\ &\Leftrightarrow z'' = i(z - 1 - i) + 1 + i \quad \text{لدينا} \\ &\Leftrightarrow z'' = iz + 2 \end{aligned}$$

ومنه

$$z'' = iz + 2$$

(2) أ) نحسب  $\frac{z''-2}{z'-2}$  :

$$\frac{z''-2}{z'-2} = \frac{iz}{-(z-1)-1} = -i \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{z''-2}{z'-2} = -i \quad \text{لدينا : استنتاج}$$

$$\frac{z''-2}{z'-2} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \text{إذن :}$$

$$\arg\left(\frac{z''-2}{z'-2}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \quad \text{و} \quad \left|\frac{z''-2}{z'-2}\right| = 1 \quad \text{ومنه}$$

وبالتالي :  $\frac{AM''}{AM'} = 1$  و  $\arg(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$  . ومنه :

$AM'M''$  مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

(2) ب) نحدد مجموعة النقط M حيث تكون النقط A و  $\Omega$  و  $M'$  و  $M''$  متداورة :



لتكن  $M$  نقطة من المستوى تخالف  $\Omega$  و  $O$ . وبالتالي النقط  $A$  و  $\Omega$  و  $M'$  و  $M''$  مختلفة



ومنه النقط  $A$  و  $\Omega$  و  $M'$  و  $M''$  متداورة يكافئ  $\frac{z''-2}{z'-2} \times \frac{z'-1-i}{z''-1-i} \in R$

يكافئ  $\frac{z-1+i}{z-i-1} \in R$

يكافئ  $\frac{z-1+i}{z-i-1} = \overline{\left(\frac{z-1+i}{z-i-1}\right)}$

يكافئ  $z + \bar{z} = 2$

يكافئ  $\text{Re}(z) = 1$

في حالة  $M = \Omega$  نجد أن  $M' = 1-i$  و  $M'' = \Omega$

ولدينا  $A$  و  $\Omega$  و  $M'(1-i)$  غير مستقيمة ومنه  $A$  و  $\Omega$  و  $M'$  و  $M''$  متداورة. وعليه فإن :

مجموعة النقط  $M$  حيث تكون النقط  $A$  و  $\Omega$  و  $M'$  و  $M''$  متداورة هي المستقيم الذي معادلة  $x = 1$

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

(1) نتحقق من أن  $e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$

ليكن  $x$  عنصرا من المجموعة  $]1, +\infty[ \cup ]0, 1]$ . لدينا :

$$\begin{aligned} e^x = x^n &\Leftrightarrow x = \ln x^n \\ &\Leftrightarrow x = n \ln x \\ &\Leftrightarrow n = f(x) \end{aligned}$$

ومنه

$$e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$$

(2) لنبين أن  $f$  قابلة للإشتقاق على اليمين في  $0$  :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln x} = 0$$

وبما أن  $0 \in R$  فإن

$f$  قابلة للإشتقاق على اليمين في  $0$ .

(3) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0^- \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^+ \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

هندسيا : المستقيم الذي معادلته  $x = 1$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C)$ .

المنحنى  $(C)$  يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل جوار  $(+\infty)$ .

(4) ندرس تغيرات الدالة :

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على كل من المجالين  $]0, 1[$  و  $]1, +\infty[$  ولكل  $x$  من  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  لدينا :



$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e \quad \text{ولدينا :}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]0,1[ \cup ]1,e[ \quad \text{و}$$

نستنتج ان

$f$  تزايدية قطعا على  $]e, +\infty[$  وتناقصية قطعا على كل من المجالين  $]0,1[$  و  $]1, +\infty[$ .

جدول تغيرات  $f$  هو :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
f	0	$-\infty$	$(+\infty)$	$+\infty$

(5) نبين ان المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق مرتين على كل من المجالين  $]0,1[$  و  $]1, +\infty[$  ولكل  $x$  من  $]0,1[ \cup ]1, +\infty[$  لدينا :

$$f''(x) = \frac{\frac{\ln^2 x}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} (\ln(x) - 1)}{(\ln x)^4}$$

$$= \frac{\ln x}{x(\ln x)^4} [\ln(x)(2 - \ln x)]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = e^2$$

ولدينا :

المشتقة الثانية للدالة  $f$  تنعدم في العدد  $e^2$  وتغير إشارتها بجواره

إذن :

المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف زوج إحداثيتها هو  $(e^2, \frac{e^2}{2})$ .

(6) إنشاء (C).

(7) نفترض أن  $n \geq 3$ .

لدينا  $f(x) \in ]-\infty, 0[$  لكل  $x$  من  $]0,1[$  إذن المعادلة لا تقبل حلا في  $]0,1[$

الدالة  $f$  متصلة و تناقصية قطعا على  $]1,e[$

$$f(1,e) = ]e, +\infty[$$

وبما أن  $n \in ]e, +\infty[$  فإنه يوجد عدد وحيد في  $]1,e[$  حيث  $f(a_n) = n$

الدالة  $f$  متصلة و تزايدية قطعا على  $]1,e[$

إذن  $f$  تقابل من  $]e, +\infty[$  نحو  $]e, +\infty[$ .

وبما أن  $n \in ]e, +\infty[$  فإنه يوجد عدد وحيد  $b_n$  في  $]e, +\infty[$  حيث  $f(b_n) = n$ .

ومنه :

لكل  $n$  من  $N$  حيث  $n \geq 3$  ، المعادلة  $f(x) = n$  أي (E) تقبل بالضبط حلين  $a_n$  و  $b_n$  ولدينا :  $1 < a_n < e < b_n$ .

الجزء الثاني :

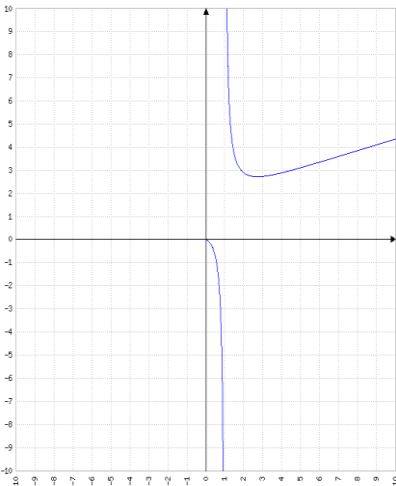
(1) بين أن  $b_n \geq n$  :  $(\forall n \geq 3)$

ليكن  $n$  من  $N$  حيث  $n \geq 3$ .

2 علوم رياضية

ذ.العربي الوظيفي

يونيو 2011



لدينا  $b_n \in [e, +\infty[$  و  $f(b_n) = n$

$$b_n - f(b_n) = b_n - \frac{b_n}{\ln b_n} = b_n \left( \frac{\ln(b_n) - 1}{\ln b_n} \right)$$

ولدينا  $b_n \in [e, +\infty[$  إذن  $\ln b_n > 1$  وبالتالي  $b_n > f(b_n)$  ومنه :

$$(\forall n \geq 3) \quad b_n > n$$

**استنتاج :** بما أن  $(\forall n \geq 3) \quad b_n > n$  و  $\lim(n) = +\infty$  فإن  $\lim b_n = +\infty$

(2) نبين أن  $(a_n)_{n \geq 3}$  تناقصية :

ليكن  $n$  من  $N$  حيث  $n \geq 3$

$$f(a_{n+1}) = n+1 \quad \text{و} \quad f(a_n) = n$$

$$\text{إذن : } f(a_{n+1}) > f(a_n)$$

وبما أن  $f$  تناقصية قطعاً على  $[1, e]$  فإن  $a_{n+1} < a_n$

ومنه :  $a_{n+1} < a_n$  لكل  $n$  من  $N$  حيث  $n \geq 3$ .

وعليه فإن المتتالية  $(a_n)_{n \geq 3}$  تناقصية .

**استنتاج :** بما أن المتتالية  $(a_n)_{n \geq 3}$  تناقصية ومصغرة بالعدد 1 فإنها منتقاربة .

(2) نبين أن  $\frac{1}{n} < \ln a_n < \frac{e}{n}$  لكل  $n$  من  $N$  حيث  $n \geq 3$ .

ليكن  $n$  من  $N$  حيث  $n \geq 3$

$$\text{لدينا } f(a_n) = n \quad \text{إذن} \quad \frac{a_n}{\ln a_n} = n \quad \text{وبالتالي} \quad a_n = n \ln a_n$$

$$\text{وحيث أن } 1 < a_n < e \quad \text{فإن} \quad 1 < n \ln a_n < e$$

$$\text{وبالتالي} \quad \frac{1}{n} < \ln a_n < \frac{e}{n} \quad \text{لكل } n \text{ من } N \text{ حيث } n \geq 3.$$

**استنتاج :** لدينا  $(\forall n \geq 3) : \frac{1}{n} < \ln a_n < \frac{e}{n}$

$$\text{إذن : } (\forall n \geq 3) : e^{\frac{1}{n}} < a_n < e^{\frac{e}{n}}$$

$$\text{وحيث أن } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{e}{n}} = 1 \quad \text{فإن}$$

$$\lim a_n = 1 \quad (\text{حسب مبرهنة الدركي ... احتراماتي وتقديراتي !})$$

(2) نبين أن  $\lim a_n^n = e$  :

لدينا  $a_n$  حل للمعادلة  $(E)$  .

$$\text{إذن} \quad e^{a_n} = a_n^n$$

بما أن  $\lim a_n = 1$  و الدالة الأسية النبرية متصلة في 1

$$\text{فإن} \quad \lim e^{a_n} = e^1 = e$$

$$\text{ومنه} \quad \lim a_n^n = e$$

التمرين الخامس :

(1) نبين أن  $(\forall x \geq 0) : 0 \leq F(x) \leq x e^{-x^2}$



http://www.vrac-coloriage.net



http://www.vrac-coloriage.net



ليكن  $x$  عددا حقيقيا موجبا. لدينا :

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq x &\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-t^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow \int_0^x e^{-x^2} dt \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x dt \\ &\Rightarrow 0 \leq e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \leq e^{-x^2} \int_0^x dt \\ &\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \end{aligned}$$

ومنه :  $(\forall x \geq 0) : 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

(1) نبين أن  $e^{-x^2} \leq e^{-x}$  ;  $(\forall x \geq 1)$

$$\begin{aligned} x \geq 1 &\Rightarrow x^2 \geq x \\ &\Rightarrow -x^2 \leq -x \\ &\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x} \end{aligned}$$

ومنه :  $(\forall x \geq 1) ; e^{-x^2} \leq e^{-x}$

استنتاج : لدينا  $(\forall x \geq 0) : 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

إن  $(\forall x \geq 1) : 0 \leq F(x) \leq xe^{-x}$

وبما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  فإن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

(2) نبين أن  $F$  قابلة للإشتقاق على  $[0, +\infty[$  وأن  $(\forall x \geq 0) ; F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$

بما أن الدالة  $t \mapsto e^{-t^2}$  متصلة على  $[0, +\infty[$  فإن الدالة  $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$  قابلة للإشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  ومنه  $F$  قابلة للإشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  ولكل  $x$  من  $[0, +\infty[$  لدينا :

$$F'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + (e^{-x^2})^2$$

$$(\forall x \geq 0) ; F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$$

(3) نبين أن  $G$  متصلة على اليسار في  $\frac{\pi}{2}$  :

نضع  $X = \tan x$  ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$  إذن :  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F(\tan x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} F(X) = 0$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) = G\left(\frac{\pi}{2}\right)$  وبالتالي :

$$G \text{ متصلة على اليسار في } \frac{\pi}{2}$$

(3) نبين أن  $(\exists c \in ]0, +\infty[) : F'(c) = 0$

الدالة  $G$  متصلة على المجال  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  وقابلة للإشتقاق على المجال  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  و  $G(0) = G\left(\frac{\pi}{2}\right)$



http://www.vrsc-colorpages.net

إذن حسب مبرهنة رول يوجد عدد حقيقي  $c'$  من المجال  $0, \frac{\pi}{2}$  حيث  $G'(c') = 0$ .

وبالتالي  $(\exists c' \in ]0, \frac{\pi}{2}[); (1 + \tan^2 c')F'(\tan c') = 0$

ومنه :  $(\exists c' \in ]0, \frac{\pi}{2}[); F'(\tan c') = 0$

وبما أن  $c' \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  فإن  $\tan c' \in ]0, +\infty[$ .

نأخذ  $c = \tan c'$  ومنه :

$$(\exists c \in ]0, +\infty[): F'(c) = 0$$

وحيث أن  $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  فإن  $e^{-2c^2} - 2cF(c) = 0$  أي أن  $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$ .

(4) لنبين أن  $H$  تناقصية على  $]0, +\infty[$  :

$$H(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} (e^{-2x^2} - 2xF(x))$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$H'(x) = \frac{-4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2}}{4x^2} - e^{-x^2} = \frac{-8x^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2}}{4x^2} < 0$$

إذن

$H$  تناقصية قطعاً على  $]0, +\infty[$

(4) نستنتج أن  $c$  وحيد :

لدينا  $H(x) = 0 \Leftrightarrow F'(x) = 0$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  و  $H(c) = F'(c) \cdot \frac{e^{c^2}}{2c} = 0$

وبما أن الدالة  $H$  تناقصية قطعاً على  $]0, +\infty[$  فإن  $H(c) = 0$  ;  $(\exists! c \in ]0, +\infty[)$  ; وبالتالي  $F'(c) = 0$  ;  $(\exists! c \in ]0, +\infty[)$

جدول تغيرات  $F$  :

$$\text{لدينا } H(x) = F'(x) \cdot \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

بما أن  $x$  من  $]0, +\infty[$  فإن إشارة  $F'(x)$  هي إشارة  $H(x)$ .

لدينا  $H$  تناقصية على  $]0, +\infty[$ .

إذا كان  $x \leq c$  فإن  $H(c) \leq H(x)$  أي  $0 \leq H(x)$

إذا كان  $c \leq x$  فإن  $H(x) \leq H(c)$  أي  $H(x) \leq 0$

ومنه  $F'$  موجبة على  $]0, c[$  وسالبة على  $]c, +\infty[$



<http://www.vrac-coloriage.net>

جدول تغيرات F هو :

$x$	$0$	$c$	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	$0$	$-$
$F$	$0$	$\frac{1}{2c} e^{-2c^2}$	$0$

[wadiiifi@hotmail.com](mailto:wadiiifi@hotmail.com)

وقفكم الله

