said.seddik@hotmail.fr

تصحيح الإمتحان الوطني لمادة الرياضيات

السنة الثانية علوم رياضية

يونيو 2012

ذ. سعيد الصديق ثا.الشابي التأهيلية تارودانت

التمرين الأول

I

❶ حساب $I-A$ و A^2

$$I-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{6-2\sqrt{5}}{4}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

❷ A تقبل مقلوبا :

لدينا
$$A^2 = I - A$$
$$\Rightarrow A^2 + A = I$$
$$\Rightarrow A(A+I) = I \quad \text{و} \quad (A+I)A = I$$
$$\Rightarrow A(A+I) = (A+I)A = I$$

إذن المصفوفة A تقبل مقلوبا .

تحديد مقلوب A :

لدينا
$$A(A+I) = (A+I)A = I$$

إذن
$$A^{-1} = A + I$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

II

❶ ليكن x و y من $\mathbb{R}$

لدينا
$$(x^2-1)(y^2-1)+1 = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1$$
$$= x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2$$

❷ * قانون تركيب داخلي في I:

ليكن a و b من $I =]1;+\infty[$

لدينا
$$a > 1 \text{ و } b > 1$$
$$\Rightarrow a^2 > 1 \text{ و } b^2 > 1$$
$$\Rightarrow (a^2-1)(b^2-1) > 0$$

$$\Rightarrow (a^2-1)(b^2-1)+1>1$$

$$\Rightarrow a^2b^2-a^2-b^2+2>1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}>1$$

$$\Rightarrow a*b>1$$

$$\Rightarrow a*b\in I$$

وبالتالي $\boxed{* \text{ قانون تركيب داخلي في } I.}$

❸ أ- φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ نحو $(I;*)$

φ تشاكل :

ليكن a و b من $\mathbb{R}_+^*$

لدينا : $\varphi(a)*\varphi(b)=\sqrt{a+1}*\sqrt{b+1}$

$$=\sqrt{(a+1)(b+1)-(a+1)-(b+1)+2}$$

$$=\sqrt{ab+\cancel{a}+\cancel{b}+\cancel{1}-\cancel{a}-\cancel{1}-\cancel{b}-1+2}$$

$$=\sqrt{ab+1}$$

$$=\varphi(a\times b)$$

وبالتالي φ تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ نحو $(I;*)$.

φ تقابل من $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ نحو $(I;*)$:

ليكن y من I ، لنحل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $y=\varphi(x)$:

$$y=\varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow y^2=x+1$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}^2 - \mathbf{1} \ \in \mathbb{R}_+^*$$

المعادلة $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}_+^*$

إذن φ تقابل من $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ نحو $(I;*)$:

وبالتالي

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi} \text{ تشاكل تقابلي من } (\mathbb{R}_+^*;\times) \text{ نحو } (\mathbf{I};*)}$$

ب – بنية $(\boldsymbol{I};*)$

بما أن $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ زمرة تبادلية و $\boldsymbol{\varphi}$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*;\times)$ نحو $(\mathbf{I};*)$

فإن :

$$\boxed{(\boldsymbol{I};*) \text{ زمرة تبادلية}}$$

ج – $\boldsymbol{\Gamma}$ زمرة جزئية من $(\boldsymbol{I};*)$

لدينا $\quad \boldsymbol{\Gamma} \subset \mathbf{I}$

ولدينا $\quad \sqrt{2} = \sqrt{1 + 2^0} \in \boldsymbol{\Gamma}$

إذن $\quad \boldsymbol{\Gamma} \neq \emptyset$

ليكن $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ من $\boldsymbol{\Gamma}$:

إذن يوجد $\mathbf{n}$ و $\mathbf{m}$ من $\mathbb{Z}$ بحيث : $\boldsymbol{x} = \sqrt{1 + 2^n}$ و $\boldsymbol{y} = \sqrt{1 + 2^m}$

إذن

$$\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}' = \sqrt{1 + 2^n} * \left(\sqrt{1 + 2^m}\right)'$$

$$= \boldsymbol{\varphi}(2^n) * \left(\boldsymbol{\varphi}(2^m)\right)'$$

$$= \boldsymbol{\varphi}(2^n) * \boldsymbol{\varphi}((2^m)')$$

$$= \boldsymbol{\varphi}(2^n) * \boldsymbol{\varphi}\left(\frac{1}{2^m}\right)$$

$$= \varphi\left(2^n \times \frac{1}{2^m}\right)$$

$$= \varphi(2^{n-m}) = \sqrt{1 + 2^{n-m}} \in \Gamma$$

وبالتالي

$$\boxed{(I;*) \text{ زمرة جزئية من } \Gamma}$$

التمرين الثاني

I

❶ تحديد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

مميز المعادلة (E) هو :

$$\Delta = (2-i)^2a^2 + 4i(1+i)$$

$$= a^2(4-4i-1+4i-4)$$

$$= -a^2 = (ia)^2$$

إذن

$$z_1 = \frac{(i-2)a+ia}{2i} = \frac{a(i-2+i)}{2i} = \frac{a(i-1)}{i} = a(i-1)$$

و

$$z_1 = \frac{(i-2)a-ia}{2i} = \frac{a(i-2-i)}{2i} = \frac{-a}{i} = ai$$

❷ أ- $z_1z_2 = a^2(i-1)$

لدينا
$$z_1z_2 = a(i+1)ai = a^2(-1+i) = a^2(i-1)$$

ب- z_1z_2 عدد حقيقي $\Leftrightarrow arg a \equiv \frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

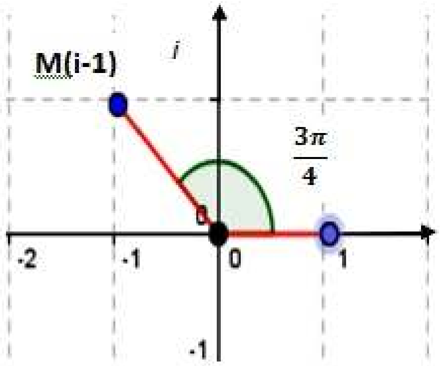
لدينا z_1z_2 عدد حقيقي يكافئ $arg(z_1z_2) \equiv 0[\pi]$

$$\Leftrightarrow arg(a^2(i-1)) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2arga + arg(i-1) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2arga + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow arga \equiv \frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$$



II

❶ أ- A و D و M مستقيمية $\Leftrightarrow (ic+1)z+(ic-1)\bar{z} = 2ic$

A و D و M مستقيمية يكافئ $\frac{Z-1}{Z-ic} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{Z-1}{Z-ic}\right)} = \frac{Z-1}{Z-ic}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{Z}-1}{\bar{Z}+ic} = \frac{Z-1}{Z-ic} \qquad \bar{c} = c$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}+ic) = (\bar{z}-1)(z-ic)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{z\bar{z}} + icz - \bar{z} - ic = \cancel{\bar{z}z} - ic\bar{z} - z + ic$$

$$\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$$

ب- $(ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0 \Leftrightarrow (AD) \perp (OM)$

لدينا $(AD) \perp (OM)$ يكافئ $\overline{(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{OM})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z}{ic-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{ic-1} \in i\mathbb{R}$$

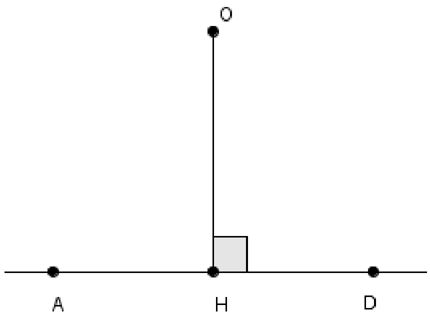
$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z}{ic-1}\right)} = -\frac{z}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{-ic-1} = -\frac{z}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow (ic+1)z = (ic-1)\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow (ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$$

❷ أ- $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$



نجمع المتساويتين طرفا بطرف

لدينا H المسقط العمودي للنقطة O على (AD)

إذن $(AD)\perp(OH)$ و A و D و H مستقيمية

$$\Rightarrow \begin{cases}(ic+1)h+(ic-1)\bar{h}=2ic\\ (ic+1)h-(ic-1)\bar{h}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(ic+1)h=2ic$$

$$\Rightarrow ich+h=ic$$

من جهة أخرى لدينا :

$$h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$$

$$\Leftrightarrow ch-c(1+i)=i\,(h-c)$$

$$\Leftrightarrow ch-c-\cancel{ic}=i\,h-\cancel{ic}$$

$$\Leftrightarrow ch-c=ih$$

$$\Leftrightarrow ich-ic=-h$$

$$\Leftrightarrow ich+h=ic$$

وبالتالي

$$\boxed{h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)}$$

ب- $(CH)\perp(BH)$

لدينا : $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$

$$\Rightarrow \frac{h-(1+i)}{h-c}=\frac{i}{c}$$

$$\Rightarrow arg\left(\frac{h-(1+i)}{h-c}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

$$\Rightarrow (CH) \perp (BH)$$

التمرين الثالث

❶ أ- $195 \wedge 143$

لدينا حسب خوارزمية إقليدس :

$$195 = 143 + 52$$

$$143 = 2 \times 52 + 39$$

$$52 = 39 + 13$$

$$39 = 3 \times 13$$

إذن : $195 \wedge 143 = 13$

بما أن 13 تقسم 52 فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب– حل المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$

ليكن الزوج $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$ إ ذن $143x - 195y = 52$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x - 15y = 4 \\ 11(-1) - 15(-1) = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 11x - 15y = 11(-1) - 15(-1)$$

$$\Rightarrow 11(x+1) = 15(y+1)$$

$$\Rightarrow 11\ /\ 15(y+1)$$

بما أن $11 \wedge 15 = 1$ حسب مبرهنة كُوص Gauss فإن $11/y+1$

$$\Rightarrow y + 1 = 11k/k \in \mathbb{Z} \text{ و } 11(x+1) = 15 \times 11k$$

$$\Rightarrow y = 11k - 1 \text{ و } x + 1 = 15k\ /k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow x = 15k - 1$ و $y = 11k - 1 \;/ k \in \mathbb{Z}$

عكسيا لدينا

$$11(15k - 1) - 15(11k - 1) = 16\cancel{5}k - 11 - 16\cancel{5}k + 15 = 4$$

و بالتالي :

$$\boxed{S_E = \{(15k - 1 ; 11k - 1)/k \in \mathbb{Z}\}}$$

❷ $(\forall k \in \mathbb{N}) : n^{4k} \equiv 1\ [5]$

5 عدد أولي حسب مبرهنة فيرما Fermat لدينا : $n^5 \equiv n\ [5]$

بما أن $5 \wedge n = 1$ فإن $n^4 \equiv 1\ [5]$

إذن $n^{4k} \equiv 1^k\ [5]$ مهما يكن k من $\mathbb{N}$

و بالتالي : $(\forall k \in \mathbb{N}) : n^{4k} \equiv 1\ [5]$

❸ أ- $n^x \equiv n^y\ [5]$

لدينا $x \equiv y\ [4]$ إذن : $(\exists k \in \mathbb{N}) : x - y = 4k$

$\Rightarrow n^{x-y} \equiv 1\ [5]$

$\Rightarrow \frac{n^x}{n^y} \equiv 1\ [5]$

$\Rightarrow n^x \equiv n^y\ [5]$

ب- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ n^x \equiv n^y\ [10]$

العددان n^x و n^y لهما نفس الزوجية إذن $n^x - n^y$ عدد زوجي :

$\Longrightarrow 2/n^x - n^y$

$\Longrightarrow n^x \equiv n^y[2]$

بما أن $2 \wedge 5 = 1$ فإن : $n^x \equiv n^y[10]$

said.seddik@hotmail.fr

❹ $\mathrm{n^x}$ و$\mathrm{n^y}$ لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .

الزوج $(x;y)$ حل للمعادلة (E)

إذن : $(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad : x = 15k - 1$ و $y = 11k - 1$

$$\Longrightarrow \quad x - y = 4k$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{x} \equiv \mathrm{y}\ [4]$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{n^x} \equiv \mathrm{n^y}\ [10]$$

أي العددان $\mathrm{n^x}$ و$\mathrm{n^y}$ لهما نفس باقي القمة الإقليدية على 10

و بالتالي : $\mathrm{n^x}$ و$\mathrm{n^y}$ لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري.

التمرين الرابع

❶ $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right) = \left(+\infty + \frac{0}{n}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 + \frac{1}{nxe^{x}}\right)$$

$$= -\infty\left(1 + \frac{1}{0^-}\right) = +\infty$$

❷ أ- الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$ بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{nxe^{x}}\right) = \left(1 + \frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

إذن

$(\mathcal{C}_n)$يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

ب- $(\mathrm{D}): \mathrm{y} = \mathrm{x}$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$ بجوار$+\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(f_n(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{e^{-x}}{n} - x\right)$

$$= lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$$

الوضع النسبي للمنحنى (C_n) و (D)

لدينا
$$f_n(x) - y = x + \frac{e^{-x}}{n} - x = \frac{e^{-x}}{n} > 0$$

وبالتالي
$$\boxed{(C_n)\text{يوجد فوق } (D)}$$

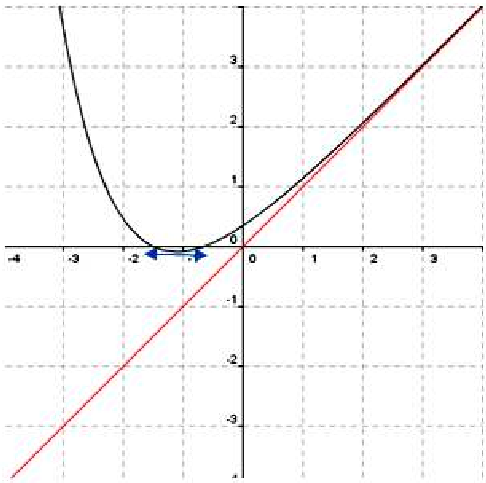
❸ تغيرات الدالة f_n

لدينا :
$$f'_n(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{n}$$

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{e^{-x}}{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow 1 = \frac{e^{-x}}{n}$$
$$\Leftrightarrow e^{-x} = n$$
$$\Leftrightarrow -x = ln(n)$$
$$\Leftrightarrow x = -ln(n)$$

x	$-\infty$		$-ln(n)$		0	$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$		
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$1 - ln(n)$	$\nearrow$		$+\infty$

❹ إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_n)$



❺ أ-إذا كان $n \geq 3$ فإن $\frac{e}{n} < ln(n)$

$$n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \text{ و } ln(n) \geq ln(3)$$

$$\Rightarrow \frac{e}{n} \leq \frac{e}{3} < 1 \text{ و } ln(n) \geq ln(3) > 1$$

$$\Rightarrow \frac{e}{n} < ln(n)$$

ب– الدالة f_n متصلة وتناقصية قطعا على المجال $]-\infty\ ;\ -ln(n)\ [$

ولدينا $$lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty > 0$$

$$f_n(-ln(n)) = 1 - ln(n) < 0$$

حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_n على المجال: $]-\infty\ ;\ -ln(n)\ [$

أي $x_n < -ln(n)$

– لدينا كذلك الدالة f_n متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]-ln(n);\ +\infty\ [$

ولدينا $$f_n(-ln(n)) = 1 - ln(n) < 0$$

$$lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty > 0$$

حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا y_n على المجال: $\left]-ln(n);+\infty\right[$

من جهة أخرى لدينا : $\frac{e}{n}<ln(n)\Rightarrow -\frac{e}{n}>-ln(n)$

$$\Rightarrow \left]-\frac{e}{n};0\right[\subset\left]-ln(n);+\infty\right[$$

و لدينا $f_n(0)=\frac{1}{n}>0$

$$n\geq 3\Rightarrow \frac{1}{n}\leq\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{e}{n}\leq\frac{e}{3}<1$$
$$\Rightarrow \frac{e}{n}-1<0$$
$$\Rightarrow e^{\frac{e}{n}-1}<1$$

$$f_n\left(-\frac{e}{n}\right)=\frac{-e}{n}+\frac{e^{\frac{e}{n}}}{n}$$

$$=\frac{e}{n}\left(e^{\frac{e}{n}-1}-1\right)<0$$

إذن $-\frac{e}{n}<y_n<0$

وبالتالي :

المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n بحيث: $x_n<-ln(n)$ و $-\frac{e}{n}<y_n<0$

ج - $lim_{n\to+\infty}x_n$ و $lim_{n\to+\infty}y_n$

لدينا : $x_n<-ln(n)$ و $lim_{n\to+\infty}-ln(n)=-\infty$

إذن $lim_{n\to+\infty}x_n=-\infty$

و لدينا : $-\frac{e}{n}<y_n<0$ و $lim_{n\to+\infty}-\frac{e}{n}=0$

إذن $lim_{n\to+\infty}y_n=0$

❻ أ- g متصلة علي اليمين في 0:

$$lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}-1-xlnx=-1-0=-1=g(0)$$

ب- $(\forall n\geq 3): g\left(-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{\ln(x)}{x_n}$

بما أن $n\geq 3$ فإنه يوجد x_n حل للمعادلة $f_n(x)=0$

$$\Rightarrow f_n(x_n) = x_n + \frac{e^{-x_n}}{n} = 0$$

$$\Rightarrow -x_n = \frac{e^{-x_n}}{n}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x_n} = ne^{x_n}$$

$$\Rightarrow g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = g(ne^{x_n}) = -1 - ne^{x_n}ln(ne^{x_n})$$

$$= -1 + \frac{1}{x_n}[ln(n) + x_n]$$

$$= -1 + \frac{ln(n)}{x_n} + 1$$

$$= \frac{ln(n)}{x_n}$$

ج- $lim_{n\to+\infty} \frac{ln(n)}{x_n}$

لدينا $$lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{x_n} = \left(\frac{-1}{-\infty}\right) = 0^+$$

بما أن : g متصلة علي اليمين في 0 فإن : $lim_{n\to+\infty} g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = g(0) = -1$

وبالتالي : $$lim_{n\to+\infty} \frac{ln(n)}{x_n} = lim_{n\to+\infty} g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = -1$$

التمرين الخامس

❶ $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

لدينا $$0 \leq t \leq x \Rightarrow 0 \leq 2t \leq 2x$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1 + 2t \leq 1 + 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$$

❷ أ- $F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{tdt}{1+2t}$

لدينا :

$$\int_0^x \frac{tdt}{1+2t} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2tdt}{1+2t} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1+2t}{1+2t} - \frac{1}{1+2t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x dt - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+2t}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int_0^x \frac{2dt}{1+2t}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}[ln(1+2t)]_0^x$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{ln(1+2x)}{4}$$

إذن

$$\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{tdt}{1+2t} = \frac{2}{x^2}\left(\frac{x}{2} - \frac{ln(1+2x)}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{ln(1+2x)}{2x^2} = F(x)$$

ب- $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$

لدينا

$$\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1 \Rightarrow \frac{t}{1+2x} \leq \frac{t}{1+2t} \leq t$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{tdt}{1+2x} \leq \int_0^x \frac{tdt}{1+2t} \leq \int_0^x tdt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \times \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x \frac{tdt}{1+2t} \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{tdt}{1+2t} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$$

- F متصلة على اليمين في 0

لدينا $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+2x} = 1$

إذن $\lim_{x\to 0^+} F(x) = 1 = F(0)$

❸

نضع : $u'(x)=2t$ و $v(x)=\frac{1}{1+2t}$

إذن : $u(x)=t^2$ و $v'(x)=\frac{-2}{(1+2t)^2}$

إذن : $\int_0^x \frac{2tdt}{1+2t} = \int_0^x u'(t)v(t)dt$

$$= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{1+2t}\right]_0^x + 2\int_0^x t^2 \times \frac{1}{(1+2t)^2}dt$$

$$= \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

❹ أ- $F'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

لدينا : $\int_0^x \frac{2tdt}{1+2t} = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{tdt}{1+2t} = \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2} - \frac{4x}{x^4}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt + \frac{2}{x^2}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^2$$

$$= \cancel{\frac{-2}{(1+2x)^2}} - \frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt + \cancel{\frac{2}{(1+2x)^2}}$$

$$= -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

ب- $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{t}{1+2x} \leq \frac{t}{1+2t} \leq t$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{(1+2x)^2} \leq \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 \leq t^2$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{t^2dt}{(1+2x)^2} \leq \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \leq \int_0^x t^2dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2} \times \frac{x^3}{3} \leq \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \leq \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{x^3} \times \frac{x^3}{3} \leq \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt \leq \frac{-4}{x^3} \times \frac{1}{(1+2x)^2} \times \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

ج- ليكن x من المجال $]0;1]$

الدالة $F : t \to \frac{1}{t} - \frac{ln(1+2t)}{2t^2}$ متصلة على المجال $]0;x]$ و متصلة على اليمين في 0

إذن F متصلة على $[0;x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0;x[$ حسب مبرهنة التزايدات المنتهية فإنه يوجد

عدد c_x من المجال $]0;x[$ بحيث $\frac{F(x)-F(0)}{x} = F'(c_x)$

ولدينا : $\frac{-4}{3} \leq F'(c_x) \leq \frac{-4}{3(1+2c_x)^2}$

من جهة أخرى : $0 < c_x \leq x \Rightarrow (1+2c_x)^2 \leq (1+2x)^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2c_x)^2} \geq \frac{1}{(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3(1+2c_x)^2} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} \leq F'(c_x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

د- لدينا $lim_{x\to 0^+} \frac{-4}{3(1+2x)^2} = \frac{-4}{3}$ إذن $lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{-4}{3}$

وبالتالي F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و $F_d'(0) = \frac{-4}{3}$.

لا تنسونا من صالح دعائكم و مرحبا بملاحظاتكم.