

التمرين الأول

1 أ

المجموعة Z مزودة بالقانون * المعروف بما يلي :

$$\forall (x, y) \in Z^2 ; x * y = x + y - 2$$

لدينا * قانون تركيب داخلي لأنه إذا كان x و y عنصرين من Z

$$\text{فإن } (x + y - 2) \in Z$$

لنبرهن على أن * تبادلي :

من أجل ذلك يكفي أن نلاحظ أن القانون + تبادلي في الحلقة

$$\text{الواحدية التبادلية } (Z, +, x)$$

$$\forall (x, y) \in Z^2 ; x * y = x + y - 2 = y + x - 2 = y * x$$

إذن * تبادلي في Z .

لنبرهن على أن القانون * تجميعي في Z .

لنكن x و y و z ثلاثة عناصر من Z

$$\text{لدينا : } (x * y) * z = (x * y) + z - 2 = x + y - 2 + z - 2$$

$$= x + (y + z - 2) - 2$$

$$= x + (y * z) - 2$$

$$= x * (y * z)$$

$$\forall (x, y, z) \in Z^3 ; (x * y) * z = x * (y * z) : \text{ إذن}$$

ومن هنا فإن القانون * تجميعي في المجموعة Z .

1 ب

ليكن e العنصر المحايد للقانون * في المجموعة Z .

$$\text{إذن : } (\forall x \in Z) ; x * e = e * x = x$$

لتحديد قيمة e ننتقل من التعبير :

$$x * e = x : \text{ إذن } x + e - 2 = x$$

$$e = 2 \in Z : \text{ ومنه } x + e - 2 = x$$

إذن 2 هو العنصر المحايد للقانون * في Z .

1 ج

لكي تكون $(Z, *)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبرهن على أن كل عنصر من Z

يقبل ممتالا من Z بلقانون * .

ليكن x عنصرا من Z و x' ممتاله بالنسبة للقانون * .

$$\text{إذن : } x * x' = x' * x = 2$$

ننتقل من المتساوية التالية :

$$x * x' = 2 : \text{ إذن } x + x' - 2 = 2$$

$$\text{بما أن } x \in Z \text{ فإن } 4 \in Z : \text{ إذن } x + x' - 2 = 2$$

وبالتالي : كل عنصر x من Z يقبل ممتالا في Z وهو $(4 - x)$.

خلاصة : لقد حصلنا على المعلومات التالية :

* داخلي و تبادلي و تجميعي في Z .

* يقبل عنصرا محايدا وهو 2 .

* كل عنصر x من Z يمتلك ممتالا وهو $(4 - x)$.

إذن : $(Z, *)$ زمرة تبادلية.

2 أ

نعتبر التطبيق f المعروف بما يلي :

$$f : (Z, \times) \mapsto (Z, \text{T})$$

$$x \mapsto f(x) = x + 2$$

لكي يكون f تشاكلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$\forall (x, y) \in Z^2 ; f(x \times y) = f(x) \text{T} f(y)$$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة Z .

$$\text{لدينا : } f(x) \text{T} f(y) = (x + 2) \text{T} (y + 2)$$

$$= (x + 2)(y + 2) - 2(x + 2) - 2(y + 2) + 6$$

$$= xy - 2 = f(x \times y)$$

إذن f تشاكل من (Z, \times) نحو (Z, T) .

لكي يكون f تقبلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$(\forall y \in Z) , (\exists ! x \in Z) ; f(x) = y$$

يعني : المعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا في Z .

ليكن y عنصرا من المجموعة Z . لدينا :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + 2 = y$$

$$\Leftrightarrow x = y - 2 \in Z$$

$$\text{إذن : } (\forall y \in Z) , (\exists ! x = y - 2 \in Z) ; f(x) = y$$

و هذا يعني أن التطبيق f تقابل من Z نحو Z .

خلاصة : f تشاكل تقبلي من (Z, \times) نحو (Z, T) .

2 ب

لنكن x و y و z ثلاثة أعداد نسبية ، لدينا من جهة أولى :

$$(x * y) \text{T} z = (x * y)z - 2(x * y) - 2z + 6$$

$$= (x + y - 2)z - 2(x + y - 2) - 2z + 6$$

$$= xz + yz - 4z - 2x - 2y - 2z + 10$$

و من جهة ثانية لدينا :

$$(x \text{T} z) * (y \text{T} z) = (x \text{T} z) + (y \text{T} z) - 2$$

$$= (xz - 2x - 2z + 6) + (yz - 2y - 2z + 6) - 2$$

$$= xz + yz - 4z - 2x - 2y - 2z + 10$$

نستنتج أن :

$$\forall (x, y, z) \in Z^3 ; (x * y) \text{T} z = (x \text{T} z) * (y \text{T} z)$$

أي : القانون T توزيعي على * في Z .

3

لنبين أن : $(Z, *, \text{T})$ حلقة تبادلية و واحدية

- زمرة تبادلية $(Z, *)$
- قانون تجميعي
- توزيعي على *
- T يقبل عنصرا محايدا في Z

• T تبادلي في Z

حصلنا من خلال الأجوبة السابقة على المعلومتين التاليتين :

$$(1) \text{ زمرة تبادلية } (Z, *) \text{ و } (2) \text{ القانون } \text{T} \text{ توزيعي على القانون } *$$

لدينا f تشاكل تقبلي من (Z, \times) نحو (Z, T)

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة (Z, T) انطلاقا من البنية الجبرية

للمجموعة (Z, \times) و ذلك عن طريق التطبيق f .

لأنه و كما نعلم : التشاكل التقبلي يُحوّل البنية الجبرية لمجموعة الأطلاق

إلى مجموعة الوصول.

بما أن الضرب \times تبادلي و تجميعي في (Z, \times) و يقبل 1 كعنصر محايد.

فإن : القانون T تبادلي في Z (3) و القانون تجميعي في Z (4)

$$\text{و } f(1) = 3 \text{ عنصر محايد للقانون } \text{T} \text{ في } Z \text{ (5)}$$

إذن من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) و (5) نستنتج أن $(Z, *, \text{T})$

حلقة تبادلية و واحدية و حنيتها العدد النسبي 3 .

4 أ

ليكن x و y عنصرين من المجموعة Z . لدينا :

$$x \text{T} y = 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 2$$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2) = 0 \text{ أو } (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \text{ أو } x = 2$$

1 II

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى:

$$\frac{\text{aff}(A) - \text{aff}(O)}{\text{aff}(B) - \text{aff}(O)} = \frac{a - 0}{ae^{\frac{i\pi}{3}} - 0} = e^{-\frac{i\pi}{3}} \quad \text{لدينا}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \text{ يعني } \left\{ \begin{array}{l} \frac{OA}{OB} = 1 \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \quad \text{إذن}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\text{aff}(A) - \text{aff}(O)}{\text{aff}(B) - \text{aff}(O)} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{\text{aff}(A) - \text{aff}(O)}{\text{aff}(B) - \text{aff}(O)} \right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \quad \text{إذن}$$

و هذا يعني أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O و قياس إحدى زواياه و هي الزاوية \widehat{O} يساوي 60° .
إذن : OAB مثلث متساوي الأضلاع .

الطريقة الثانية:

$$OA = |\text{aff}(A) - \text{aff}(O)| = |a - 0| = |a| \quad \text{لدينا}$$

$$OB = |\text{aff}(B) - \text{aff}(O)| = |ae^{\frac{i\pi}{3}}| = |a| \quad \text{لدينا}$$

$$AB = |\text{aff}(B) - \text{aff}(A)| = |b - a| \quad \text{و كذلك}$$

$$= \left| ae^{\frac{i\pi}{3}} - a \right| = \left| a \left(e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right) \right| = |a| \cdot \left| e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right|$$

$$= |a| \cdot \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right| = |a| \cdot \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |a|$$

نستنتج إذن أن : $OA = OB = AB$ و $A \neq B \neq C$ إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

1 II

لدينا r دوران مُعرف بما يلي :

$$(P) \xrightarrow{r_M \left(\frac{\pi}{3} \right)} (P)$$

نتطلق من الكتلية : $A_1 = r^{-1}(A)$ إذن : $r(A_1) = A$ و منه حسب التعريف العكسي للدوران r نكتب :

$$(\text{aff}(A) - \text{aff}(M)) = e^{\frac{i\pi}{3}} (\text{aff}(A_1) - \text{aff}(M))$$

$$(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} (a_1 - z) \quad \text{يعني}$$

$$(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} a_1 - e^{\frac{i\pi}{3}} z \quad \text{يعني}$$

$$e^{\frac{i\pi}{3}} a_1 = a - z + e^{\frac{i\pi}{3}} z \quad \text{يعني}$$

$$a_1 = e^{-\frac{i\pi}{3}} (a - z + e^{\frac{i\pi}{3}} z) \quad \text{يعني}$$

$$a_1 = e^{-\frac{i\pi}{3}} a - e^{-\frac{i\pi}{3}} z + z \quad \text{يعني}$$

$$e^{-\frac{i\pi}{3}} = \cos \left(\frac{-\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{3} \right) \quad \text{من جهة أخرى لدينا}$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



4 ب

تكون الحلقة $(\mathbb{Z}, *, I)$ كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر .
ليكن x قاسما للصفر في $(\mathbb{Z}, *, I)$.

إذن : $\exists y \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} ; x I y = y I x = 2$ و منه حسب نتيجة السؤال (4 أ) : $x = 2$ أو $y = 2$ إذن لا وجود لأي قاسم للصفر لأن قواسم الصفر إن وجدت يجب أن تخالف العنصر المحايد 2 و بالتالي $(\mathbb{Z}, *, I)$ حلقة كاملة .

4 ج

تكون الحلقة الواحدية $(\mathbb{Z}, *, I)$ جسما إذا كان كل عنصر من $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ يقبل مقلوبا (أو مقلوبا) في (\mathbb{Z}, I) .
و لذلك نحدد أولا الصيغة العامة لممثل عنصر x من \mathbb{Z} بالقانون I .
ليكن y ممثل x بالنسبة للقانون I . إذن :

$$x I y = 3 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 3$$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x - 2) = (2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x - 3}{x - 2}$$

و نلاحظ أن الكمية $\frac{2x - 3}{x - 2}$ ليست دائما عنصرا من \mathbb{Z} .

العنصر $1 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو ممثل 1 بالنسبة لـ I و العنصر $3 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو ممثل 3 بالنسبة لـ I لكن العنصر $\frac{11}{5} \notin \mathbb{Z}$ هو ممثل 7 بالنسبة للقانون I .
إذن توجد عناصر من \mathbb{Z} لا تقبل مقلوبا في \mathbb{Z} بالنسبة لـ I .
و بالتالي فالحلقة $(\mathbb{Z}, *, I)$ ليست جسما .

التمرين الثاني

1 I

$$\Delta = a^2(3 + i\sqrt{3})^2 - 8a^2(1 + i\sqrt{3})$$

$$= a^2(6 + 6i\sqrt{3}) - 8a^2(1 + i\sqrt{3})$$

$$= 6a^2(1 + i\sqrt{3}) - 8a^2(1 + i\sqrt{3})$$

$$= \boxed{-2a^2(1 + i\sqrt{3})} \quad (1)$$

$$a^2(-1 + i\sqrt{3})^2 = a^2(1 - 3 - 2i\sqrt{3})$$

$$= a^2(-2 - 2i\sqrt{3})$$

$$= \boxed{-2a^2(1 + i\sqrt{3})} \quad (2)$$

نستنتج إذن من (1) و (2) أن : $\Delta = a^2(-1 + i\sqrt{3})^2$

2 I

$$\Delta = a^2(-1 + i\sqrt{3})^2 \quad \text{لدينا}$$

إذن : المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{(3 + i\sqrt{3})a - (-1 + i\sqrt{3})a}{4}$$

$$= \frac{3a + i\sqrt{3}a + a - i\sqrt{3}a}{4} = \frac{4a}{4} = a$$

$$z_2 = \frac{(3 + i\sqrt{3})a + (-1 + i\sqrt{3})a}{4}$$

$$= \frac{3a + i\sqrt{3}a - a + i\sqrt{3}a}{4} = \frac{2a + 2i\sqrt{3}a}{4} = \frac{a(1 + i\sqrt{3})}{2}$$

و بنفس الطريقة لدينا : $OB_1 = |aff(B_1) - aff(O)| = |b_1|$

و لدينا كذلك : $A_1M = |aff(M) - aff(A_1)| = |z - a_1|$

$$\begin{aligned} &= \left| z - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| \\ &= \left| \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| \\ &= \left| \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| = |b_1| \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{OB_1 = A_1M}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن كل ضلعين متقابلين في الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع متقابلين . إذن : OA_1MB_1 متوازي أضلاع



أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

و منه : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$ يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1$

و منه : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$ يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$

و منه : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\left(\frac{a}{b}\right)$ إذن : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$

نوظف بعد ذلك هذه المتساوية فيما سيأتي :

$$\begin{cases} (a-z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a_1-z) \\ (b_1-z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(b-z) \end{cases} \quad \text{إذن :} \quad \begin{cases} r(A_1) = A \\ r(B) = B_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (z-a_1) = e^{-\frac{i\pi}{3}}(z-a) \\ (z-b_1) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z-b) \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

$$\left(\frac{z-b_1}{z-a_1}\right) = \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}(z-b)}{e^{-\frac{i\pi}{3}}(z-a)}\right) \quad \text{أي :}$$

$$\left(\frac{z-b_1}{z-a_1}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \left(\frac{z-b}{z-a}\right) \quad \text{يعني :}$$

$$\left(\frac{z-b_1}{z-a_1}\right) = \frac{-a}{b} \left(\frac{z-b}{z-a}\right) \quad \text{يعني :}$$

بإمكاننا أن نجيب دون استعمال المعطيين $r(A_1) = A$ و $r(B) = B_1$

و هذا ما سوف أعرضه الآن كطريقة أخرى للجواب .

الطريقة الثانية :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و $\frac{a}{b} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

و من هاتين الكتبتين نستنتج ما يلي :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = e^{-\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1 \quad \text{إذن :}$$

إذن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z + z$

$$= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

و بنفس الطريقة نطلق من الكتابة $r(B) = B_1$

إذن حسب التعريف المعطي للدوران r نكتب :

$$(aff(B_1) - aff(M)) = e^{\frac{i\pi}{3}}(aff(B) - aff(M))$$

$$(b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(ae^{\frac{i\pi}{3}} - z)$$

$$\text{يعني :} \quad b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z$$

و لدينا : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و نضيف كذلك : $e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن بالرجوع إلى آخر تعبير لـ b_1 نكتب :

$$b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z = ae^{\frac{2i\pi}{3}} + \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a + \left(1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$$



بصفة عامة ، لكي نبرهن على أن رباعيا ما متوازي أضلاع ، توجد عدة طرق من بينها : القطران لهما نفس المنتصف و صيغة التوازي و الصيغة المتجهية و صيغة التقليس . لكن أرى أن أسهل طريقة في هذا السؤال هي أن نبرهن أن كل ضلعين متقابلين متقابلين . لأن المسافة في المستوى المعطي ما هي إلا معيار لعدد عقدي .



لنبرهن أن : $OB_1 = A_1M$ و $OA_1 = B_1M$

لدينا : $OA_1 = |aff(A_1) - aff(O)| = |a_1|$

و لدينا : $B_1M = |aff(M) - aff(B_1)| = |z - b_1|$

$$= \left| z - \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| = |a_1|$$

إذن : $\boxed{OA_1 = B_1M}$ (1)



II 3 ب

لنبين أن التكافؤ التالي صحيح .

$$A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمة} \Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة}$$

$$A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمة} \Leftrightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a}{b} \left(\frac{z-b}{z-a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \left(\frac{z-b}{z-a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{0-a}{0-b} \right) \times \left(\frac{z-b}{z-a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة}$$

التعريف الثالث

1 ا

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1 بحيث : $3^n - 2^n = 0 [n]$

إذن : n يقسم $(3^n - 2^n)$

ومنه : $3^n - 2^n = mn$; $(\exists m \in \mathbb{N}) \rightarrow (1)$

ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

إذن : $n = ps$; $(\exists s \in \mathbb{N}) \rightarrow (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $3^n - 2^n = ms p$; $\begin{matrix} m \\ s \end{matrix} \in \mathbb{N}$

إذن : p يقسم $(3^n - 2^n)$ يعني : $3^n - 2^n \equiv 0 [p] \rightarrow (3)$
لكي نبرهن على أن $p \geq 5$ يكفي أن نثبت الجاريتين $p = 2$ و $p = 3$

نفترض أن $p = 2$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0 [2]$

إذن حسب الافتراض : $3^n - 2^n \equiv 0 [2] \rightarrow (4)$

ونعلم أنه كلما كان $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $2^n \equiv 0 [2] \rightarrow (5)$

نجمع المتوافقتين (4) و (5) طرفا بطرف : $3^n - 2^n + 2^n \equiv 0 [2]$

يعني : $3^n \equiv 0 [2]$; ومنه : 2 يقسم 3^n أي : 2 يقسم $3 \times 3^{n-1}$

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن $2 \wedge 3^{n-1} = 1 \rightarrow (7)$

من (6) و (7) نستنتج إذن حسب (Gauss) أن : 2 يقسم 3

وهذا **تناقض** واضح . إذن : $p \neq 2$

نفترض أن $p = 3$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0 [3]$

إذن حسب الافتراض نكتب : $3^n - 2^n \equiv 0 [3] \rightarrow (8)$

ونعلم أن : $-3^n \equiv 0 [3] \rightarrow (9)$

نجمع المتوافقتين (8) و (9) طرفا بطرف : $3^n - 2^n - 3^n \equiv 0 [3]$

يعني : $3^n - 2^n - 3^n \equiv 0 [3] \rightarrow (10)$

يعني : 3 يقسم 2^n ومنه : 3 يقسم $2 \times 2^{n-1}$

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن : $2 \wedge 3^{n-1} = 1 \rightarrow (11)$

من (10) و (11) نستنتج حسب Gauss أن : 3 يقسم 2

وهذا **تناقض** واضح . إذن : $p \neq 3$

خلاصة السؤال أ :

إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

و يحقق $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$ و كان p أصغر قواسمه الأولية الموجبة

فإن : $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$ و $p \geq 5$

ولدينا كذلك : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$; $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1$$

و من هذه النتيجة نكتب : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

نحن الآن مُتسلحون بمتساويتين ثميتين :

$$(1) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1 \quad \text{و} \quad (2) \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

ننطلق إذن من نتيجتي السؤال (2) أ) و نوظف المتساوية (1) :

$$a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = e^{-\frac{i\pi}{3}}a + e^{\frac{i\pi}{3}}z \\ b_1 = -e^{-\frac{i\pi}{3}}a + e^{-\frac{i\pi}{3}}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{b}{a}\right)z \\ b_1 = -\left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{a}{b}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a} \\ b_1 = \frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = z - \frac{a^2}{b} - \frac{bz}{a} \\ z - b_1 = z + \frac{a^2}{b} - \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(1 - \frac{b}{a}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(1 - \frac{a}{b}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(\frac{b}{a}\right)z \end{cases}$$

فيما يلي سوف نوظف المتساوية الثمينة (2) :

$$\Leftrightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} = \frac{\frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a}}{\frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)\left(a + \left(\frac{b}{a}\right)^2 z\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)(z - a)} = \frac{a - \frac{a}{b}z}{z - a}$$

$$= \frac{\left(\frac{-a}{b}\right)(-b + z)}{(z - a)} = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a}\right)$$

$$\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a}\right)$$

و بالتالي :



نعود إذن ، بعد هذه الجولة المرحلة مع r ، إلى السؤال (د) .
وننتقل من التعبير التالي : $a = q(p-1) + r$
نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد n نحصل على :

$$an = qn(p-1) + rn$$

يعني : $rn = an - qn(p-1) \rightarrow (13)$

ولدينا حسب النتيجة (12) : $an = 1 + b(p-1)$
نعوّض an بالتعبير $1 + b(p-1)$ في العلاقة (13) نجد :

$$rn = 1 + b(p-1) - qn(p-1)$$

أي : $rn = 1 + (b - qn)(p-1)$
نضع : $k = (b - qn)$ إذن : $rn = 1 + k(p-1)$

و لإتسام الجواب يعني أن نُبرهن أن $k \in \mathbb{N}^*$
لدينا : $(b, q, n) \in \mathbb{Z}^3$ إذن : $k \in \mathbb{Z}$
ونفصل هنا بين ثلاث حالات وهي : $k > 0$ أو $k < 0$ أو $k = 0$

نفترض أن : $k = 0$ إذن : $b = qn$
نعوض إذن b بالقيمة qn في النتيجة (12) : $an - qn(p-1) = 1$
ومنه حسب النتيجة (13) : $rn = 1$
أي : n يقسم 1 يعني : $n = 1$

و هذا تناقض لأن : $n > 1$ إذن : $k \neq 0 \rightarrow (*)$
نفترض أن : $k < 0$ إذن : $b < qn$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد السلب قطعاً $(p-1)$ - نجد :
 $-b(p-1) > -qn(p-1)$

نضيف إلى كلا الطرفين الكمية an نجد :
 $an - b(p-1) > an - qn(p-1)$
إذن باستعمال النتيجة (12) و (13) نجد : $1 > rn \rightarrow (14)$

ولدينا : $r > 0$ و $n > 1$ إذن : $rn > r \rightarrow (15)$
من (14) و (15) نستنتج أن : $1 > rn > r$ يعني : $1 > r$
العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الأصغر من 1 هو الصفر .

إذن : $r = 0$ و هذا تناقض لأن $r \neq 0$ حسب الملاحظة 2 .
إذن : $k > 0$ يعني : $k \in \mathbb{N}^*$

خلاصة السؤال (د) : رأينا في هذا السؤال أنه إذا كان r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على العدد $(p-1)$ فإنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$
أو بتعبير جميل : $rn = 1 + k(p-1) ; (\exists k \in \mathbb{N}^*) \rightarrow (16)$

بإستعمال البرهان بالخلف ، نفترض وجود عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعاً من 1 و يحقق : $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

ننتقل من النتيجة (16) :

$$\begin{cases} 2^{p-1} \equiv 1 [p] \\ 3^{p-1} \equiv 1 [p] \end{cases}$$

بما أن : $(k \in \mathbb{N}^*)$ فإن : $\begin{cases} 2^{k(p-1)} \equiv 1 [p] \\ 3^{k(p-1)} \equiv 1 [p] \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} -2 \times 2^{k(p-1)} \equiv -2 [p] \\ 3 \times 3^{k(p-1)} \equiv 3 [p] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} -2^{1+k(p-1)} \equiv -2 [p] \\ 3^{1+k(p-1)} \equiv 3 [p] \end{cases}$



1 ب
نعلم أن p عدد أولي و يخالف العدد الأولي 2 إذن : $p \wedge 2 = 1$
ومنه حسب Fermat : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$
و بنفس الطريقة p عدد أولي يخالف العدد الأولي 3 إذن : $p \wedge 3 = 1$
ومنه حسب Fermat : $3^{p-1} \equiv 1 [p]$

1 ج
يكفي أن نبرهن على أن : $n \wedge (p-1) = 1$ ثم نستعمل Bezout .
في البداية وجب التذكير بخصوصية قوية و مهمة تربط بين مفهوم التفتيح إلى جداء عوامل أولية و مفهوم القاسم المشترك الأكبر . و سوف أتذكر بها باستعمال أمثلة فقط دون الخوض في مآهات الرموز الرياضية.

لاحظ الأمثلة التالية :
 $(2^3 \times 5^4 \times 7^6) \wedge (2^1 \times 5^6 \times 7^3 \times 11^2) = (2^1 \times 5^4 \times 7^3)$
 $(2^5 \times 7^8) \wedge (3^4 \times 11^6) = 1$
 $(2^7 \times 3^4 \times 13) \wedge (13 \times 11^4) = 13$
 $(13^5 \times 2^7 \times 3^2) \wedge (5^5 \times 7 \times 11^2) = 1$



بالعودة إلى السؤال (ج) : ليكن $p^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_i^{\alpha_i}$ تفكيك العدد n إلى جداء عوامل أولية بحيث : $p < p_2 < \dots < p_i$
و ليكن $q^{\alpha_1} \times q_2^{\alpha_2} \times q_3^{\alpha_3} \times \dots \times q_j^{\alpha_j}$ تفكيك العدد $(p-1)$ إلى جداء عوامل أولية بحيث : $q < q_2 < \dots < q_j$
بما أن p هو أصغر قاسم أولي للعدد n و بما أن $(p-1) < p$ فإن : $q < q_1 < q_2 < \dots < q_j < p < p_2 < \dots < p_i$
نلاحظ أن الأعداد الأولية q كلها تخلف الأعداد الأولية p . إذن :

$$(p^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_i^{\alpha_i}) \wedge (q^{\alpha_1} \times q_2^{\alpha_2} \times \dots \times q_j^{\alpha_j}) = 1$$

يعني : $n \wedge (p-1) = 1$
ومنه حسب Bezout : $\exists (a, u) \in \mathbb{Z}^2 ; an + u(p-1) = 1$
نضع $b = -u$ إذن : $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; an - b(p-1) = 1 \rightarrow (12)$

ملاحظة 1 : من هذه النتيجة الأخيرة يُمكن أن نستخرج باستعمال مبرهنة Bezout العكسية ما يلي :

$$(*) \rightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge (p-1) = 1 \\ n \wedge b = 1 \\ n \wedge (p-1) = 1 \end{cases}$$

خلاصة السؤال (ج) : إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعاً من 1 و يحقق $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$ و كان p أصغر قواسم الأولية الموجبة فإنه يوجد عدنان نسبيين a و b بحيث : $an - b(p-1) = 1$

1 د
ليكن r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية لـ a على $(p-1)$.
 $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$
يعني : $\begin{cases} a = q(p-1) + r \\ 0 \leq r < p-1 \end{cases}$

ملاحظة 2 : قبل أن نجيب على السؤال (د) لاحظ أنه بإمكاننا أن نبين أن $r > 0$ و سوف نحتاج هذه النتيجة فيما سيأتي .
لدينا : $r \geq 0$ إذن $r = 0$ أو $r > 0$.
نفترض أن $r = 0$ إذن : $a = q(p-1)$
يعني : $(p-1)$ يقسم a ومنه : $a \wedge (p-1) = (p-1)$
إذن حسب النتيجة (*) : $(p-1) = 1$
يعني : $p = 2$. و هذا تناقض لأن $p \geq 5$
إذن : $0 < r < (p-1)$

$$v'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \quad \text{و لدينا :}$$

- إذا كان $x = 1$: فإن $v'(x) = 0$
- إذا كان $x > 1$: فإن $v'(x) < 0$
- إذا كان $x < 1$: فإن $v'(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x + 1) \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$= \ln(0^+) - 0 + 1 = -\infty - 0 + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + 1) \quad \text{و لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة v كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
$v'(x)$		0	
		+	-
v	$-\infty$	-2	$-\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الدالة v :

- متصلة على المجال $]0; +\infty[$.
- تزايدية على المجال $]0; 1]$.
- تناقصية على المجال $]1; +\infty[$.
- $v(1) = -2$.

إذن -2 قيمة قصوية للدالة v على المجال $]0; +\infty[$.

يعني $\forall x \in]0; +\infty[; v(x) \leq -2 < 0$

يعني $\forall x \in]0; +\infty[; v(x) < 0$

يعني $\forall x \in]0; +\infty[; \ln x - x + 1 < 0$

يعني $\forall x \in]0; +\infty[; \ln x < x - 1$

و بما أن : $]1; +\infty[\subset]0; +\infty[$

فإن : $\forall x \in]1; +\infty[; \ln x < x - 1$

ليكن x عنصرا من المجال $]1; +\infty[$. لدينا : $h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$

$$h'(x) = \frac{x \ln x - (x-1)(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2}$$

$$= \frac{x \ln x - (x \ln x + x - \ln x - 1)}{(x \ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2}$$

و نعلم أن : $(\ln x - x + 1) < 0 ; (\forall x > 1)$

و كذلك : $(x \ln x)^2 > 0 ; (\forall x > 1)$

إذن : $\frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2} < 0 ; (\forall x > 1)$

يعني : $h'(x) < 0 ; (\forall x > 1)$

أي أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $]1; +\infty[$.

و منه باستعمال النتيجة (16) نكتب : $\begin{cases} -2^{2^n} \equiv -2 [p] \\ 3^{2^n} \equiv 3 [p] \end{cases}$

نجمع هاتين المتوافقتين طرفا بطرف نجد : $(17) \rightarrow 3^{2^n} - 2^{2^n} \equiv 1 [p]$
و لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$

إذن : $3^n \equiv 2^n [p]$

و بما أن $(r \in \mathbb{N}^*)$ فإن : $3^{2^n} \equiv 2^{2^n} [p]$

و منه : $(18) \rightarrow 2^{2^n} - 3^{2^n} \equiv 0 [p]$

نجمع المتوافقتين (17) و (18) طرفا بطرف نجد :

$$3^{2^n} - 2^{2^n} + 2^{2^n} - 3^{2^n} \equiv 1 + 0 [p]$$

يعني : $0 \equiv 1 [p]$ يعني كذلك : $1 \equiv 0 [p]$ أي p يقسم 1
و منه $p = 1$ لأن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو نفسه .
و هذا تناقض لأن $p \geq 5$ إذن لا وجود له في $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

خلاصة التمرين بأكماله :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} ; 3^n - 2^n \not\equiv 0 [n]$$

التمرين الرابع

الجزء الأول

1 أ



$$\text{لدينا : } \begin{cases} h(x) = \frac{x-1}{x \ln x} ; \forall x > 1 \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

نضع : $\varphi(x) = x \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\left(\frac{x \ln x}{x-1} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\left(\frac{x \ln x - 1 \ln 1}{x-1} \right)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \right)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \right)} = \frac{1}{\varphi'_d(1)}$$

و لدينا : $\varphi(x) = x \ln x$ إذن : $\varphi'(x) = \ln x + 1$

يعني : $\varphi'_d(1) = \varphi'_g(1) = \varphi'(1) = \ln(1) + 1 = 1$

و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{1}{\varphi'_d(1)} = \frac{1}{1} = 1 = h(1)$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1)$

و هذا يعني أن الدالة h دالة متصلة على يمين 1

1 ب

نعتبر الدالة العددية v المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي :

$$v(x) = \ln x - x + 1$$

لندرس تغيرات الدالة v على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا v عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة والقابلة للإشتقاق

على المجال $]0; +\infty[$. إذن : v قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$.



1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $[1; +\infty[$.

$$g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t} \ln t} - \frac{1}{t \ln t} \right) dt$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t}}{t \ln t} - \frac{1}{t \ln t} \right) dt$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} \right) dt$$



1 ج

باستعمال تقنية تغيير المتغير نضع : $\sqrt{t} = u$
 إذن : $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ يعني : $dt = 2u du$
 • إذا كان $t = x$ فإن $u = \sqrt{x}$
 • إذا كان $t = x^2$ فإن $u = x$
 إذن آخر تكامل حصلنا عليه يصبح :

$$\int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} \right) dt = \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{u - 1}{u^2 \ln(u^2)} \right) (2u du)$$

$$= \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{u - 1}{2u^2 \ln u} \right) (2u du)$$

$$= \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{u - 1}{u \ln u} \right) du$$

إذن : $(\forall x > 1) ; g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{1}{u \ln u} \right) du$

Remarque : u et t sont des paramètres d'intégration qu'on peut schématiser comme des espaces mémoires temporels

2 أ

ليكن $x > 1$ و ليكن $t \in [\sqrt{x}; x]$
 لدينا الدالة f تناقصية على المجال $[1; +\infty[$.
 إذن فهي تناقصية على المجال $[\sqrt{x}; x]$ لأن $x > 1$.
 بما أن : $\sqrt{x} \leq t \leq x$ فإن : $h(x) \leq h(t) \leq h(\sqrt{x})$
 يعني : $h(x) \leq \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) \leq h(\sqrt{x})$
 إذن : $\int_{\sqrt{x}}^x h(x) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x h(\sqrt{x}) dt$
 يعني : $h(x) \int_{\sqrt{x}}^x 1 dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x}) \int_{\sqrt{x}}^x 1 dt$
 يعني : $h(x) [t]_{\sqrt{x}}^x \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x}) [t]_{\sqrt{x}}^x$
 يعني : $h(x)(x - \sqrt{x}) \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x})(x - \sqrt{x})$
 و بالتالي حسب نتيجة السؤال ج) ($\forall x > 1$) نكتب :
 (*) $h(x)(x - \sqrt{x}) \leq g(x) - \ln 2 \leq h(\sqrt{x})(x - \sqrt{x})$

2 أ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x \ln x} \right) - \left(\frac{1}{x \ln x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} \right) - \left(\frac{1}{x \ln x} \right) = \left(\frac{1}{+\infty} \right) - \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0$$

نلخص النتائج المتعلقة بالدالة h في الجدول التالي :

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	
h	1	0

2 ب

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة h أن الدالة h متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $[1; +\infty[$ بحيث :

$$h([1; +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) ; h(1)] =]0; 1]$$

إذن h تقابل من المجال $[1; +\infty[$ نحو المجال $]0; 1]$.
 أي : $\forall x \in [1; +\infty[; \exists ! y \in]0; 1] : y = h(x)$
 أو بتعبير آخر : $\forall x \in [1; +\infty[; \exists ! h(x) \in]0; 1]$
 يعني : $(\forall x \geq 1) ; 0 < h(x) \leq 1$

الجزء الثاني

1 أ



ليكن x عنصرا من المجال $[1; +\infty[$.
 لاحظ في البداية أن : $(t \ln t)' = 1 + \ln t$
 نستغل إذن هذه الملاحظة أثناء الحساب .

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \int_x^{x^2} \left(\frac{1 + \ln t - \ln t}{t \ln t} \right) dt$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{1 + \ln t}{t \ln t} \right) dt - \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{t} \right) dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{(t \ln t)'}{t \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt$$

$$= [\ln(t \ln t)]_x^{x^2} - [\ln t]_x^{x^2}$$

$$= (\ln(x^2 \ln(x^2)) - \ln(x \ln x)) - (\ln(x^2) - \ln x)$$

$$= \ln \left(\frac{x^2 \ln(x^2)}{x \ln x} \right) - \ln \left(\frac{x^2}{x} \right) = \ln \left(\frac{2x^2 \ln(x)}{x \ln x} \right) - \ln(x)$$

$$= \ln(2x) - \ln(x) = \ln \left(\frac{2x}{x} \right) = \ln 2$$

و بالتالي : $(\forall x > 1) ; \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall x > 1) ; g(x) \geq \frac{h(x)(x - \sqrt{x}) + \ln 2}{x - 1}$$

$x \rightarrow +\infty$

إذن حسب خاصية الترتيب و النهايات نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

بالنسبة لنهاية $\frac{g(x)}{x}$ بجوار $+\infty$ ننطلق من التأيير التمين المحصل عليه في السؤال (2) كما سوف نستعمل أثناء الحساب النهاية المحصل عليها سابقا و هي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ لدينا :

$$(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2 \leq g(x) \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x}) + \ln 2$$

نضرب طرفي هذا التأيير في العدد الموجب قطعا $\frac{1}{x}$ نجد :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x}$$

ثم نحسب نهايتي طرفي هذا التأيير بجوار $+\infty$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \\ &= \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)(0) + \frac{\ln 2}{+\infty} = (1 - 0)(0) + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)h(t) + \frac{\ln 2}{t^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)(0) + \frac{\ln 2}{(+\infty)^2} = 0 \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x}$$

$x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$

0 **0**

إذن حسب خاصية النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

2 ب

نضرب أطراف التأيير (*) في العدد الموجب قطعا $\left(\frac{1}{x-1}\right)$ نجد :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(x) \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x - 1} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(\sqrt{x})$$

بعد ذلك نحسب نهايتي طرفي هذا التأيير على يمين 1 نجد :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}h(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right)h(x) = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1}\right)h(1) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(\sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right)h(\sqrt{x}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1}\right)h(\sqrt{1}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(x) \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x - 1} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)h(\sqrt{x})$$

$x \rightarrow 1^+$ $x \rightarrow 1^+$

1/2

و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{g(x) - \ln 2}{x - 1}\right) = \frac{1}{2}$

أي أن الدالة g قليلة للإشتقاق على اليمين في 1 و $g'_d(1) = \frac{1}{2}$.

2 ج

لدينا حسب التأيير الوارد في السؤال (2) :

$$(\forall x > 1) ; g(x) \geq h(x)(x - \sqrt{x}) + \ln 2$$

$+\infty$ بجوار $(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x})(x - 1)}{x \ln x} + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x - 1)}{x \ln x} + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{x - 1}{x}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{0^+}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right) \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (+\infty)(1 - 0)(1 - 0) + \ln 2 \\ &= (+\infty)(1)(1) + \ln 2 = +\infty \end{aligned}$$



3 ب

لدينا حسب نتيجة السؤال (2) ب) من الجزء الأول :

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < h(x) \leq 1$$

نلاحظ أن : $x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1$

إذن : $(\forall x \geq 1) ; 0 < h(\sqrt{x}) \leq 1$

ومن هنا : $(\forall x \geq 1) ; 0 < \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}$

يعني : $(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$

و من هذه الكلبة نستنتج أن g دالة تزايدية قطعاً على المجال $]1; +\infty[$.
و لإنشاء جدول تغيرات g نستدعي النتائج التي حصلنا عليها من قبل و هي :

■ معرفة g متصلة على $]1; +\infty[$

■ g تزايدية قطعاً على $]1; +\infty[$

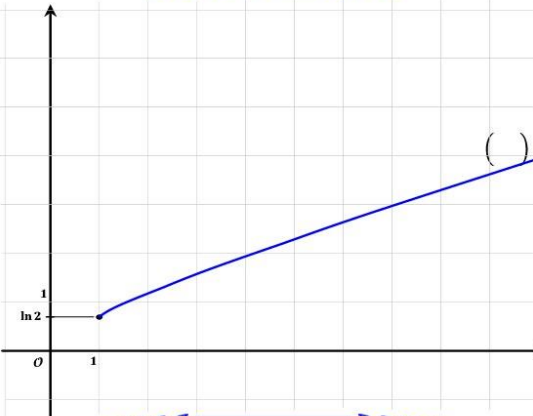
■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

■ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = \ln 2$

نرسم إذن جدول تغيرات g كما يلي :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
g	$\ln 2$	$+\infty$

3 ج



الجزء الثالث

1 ا

ليكن x عنصراً من المجال $]1; +\infty[$

لدينا : $k(x) = g(x) - x + 1$

بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$

فإن : k قابلة للإشتقاق على $]1; +\infty[$ و لدينا : $k'(x) = g'(x) - 1$

لدينا حسب نتيجة السؤال (3) ب) من الجزء الثاني :

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$$

3 ا

أذكر في البداية بما يلي : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصراً من المجال I . فإن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال I وبالخصوص تقبل دالة أصلية F التي تتعمم في a و تحقق :

$$\begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$F : I \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

انتهى التكبير

ليكن a عنصراً من المجال $]1; +\infty[$.

نعتبر الدالة المحدية u المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بما يلي :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \ln x}$$

نلاحظ أن u دالة متصلة على $]1; +\infty[$

و ذلك حسب المبرهنات العامة للاتصال .

إذن : u تقبل عدة دوال أصلية على $]1; +\infty[$ و بالخصوص u تقبل دالة أصلية v التي تتعمم في a و معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(x) = u(x) \end{cases}$$

$$v :]1; +\infty[\mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x u(t) dt$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة g نكتب :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt ; x > 1 \\ &= \int_x^a \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt + \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \\ &= \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \\ &= v(x^2) - v(x) \end{aligned}$$

نحصل إذن على العلاقة التالية : $g(x) = v(x^2) - v(x) ; x > 1$
انطلاقاً من الدوال $x \rightarrow x$ و $x \rightarrow x^2$ و v و $x \rightarrow x$ نستطيع القول ، باستعمال المبرهنات العامة للإشتقاق مركب دالتين ، أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$.

و لدينا : $g'(x) = (v(x^2) - v(x))'$

$$\begin{aligned} &= 2x v'(x^2) - v'(x) \\ &= 2x u(x^2) - u(x) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2} \ln(x^2)} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} = \frac{2x}{2x \ln x} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} \\ &= \frac{x}{x \ln x} - \frac{\sqrt{x}}{x \ln x} = \frac{x - \sqrt{x}}{x \ln x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x})^2 \ln(\sqrt{x}^2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x > 1) ; g'(x) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$

1 II ج

لدينا $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية تزايدية قطعاً .
 وبما أنها مكبورة بالعدد α (لأن $u_n < \alpha$; $\forall n \geq 0$) حسب (1) أي
 فإنها متقاربة ونهيتها ℓ تحقق : $1 + g(\ell) = \ell$
 ورأينا أن هذه المعادلة تقبل حلاً وحيداً في المجال $]1; +\infty[$ و هو α .
 إذن : $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$

2 II أ

نعتبر الدالة العددية ψ المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بما يلي :
 بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$.
 فإن ψ قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$.
 ومنه ψ قابلة للإشتقاق على أي مجال يوجد ضمن $]1; +\infty[$.
 نختار المجال $[u_n; \alpha]$ الذي يوجد ضمن $]1; +\infty[$.
 (وذلك لأن : $1 \leq u_n < \alpha$; $\forall n \geq 0$)
 إذن بتطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية (TAF)
 على الدالة ψ في المجال $[u_n; \alpha]$ نجد :

$$\exists c \in]u_n; \alpha[; \frac{\psi(u_n) - \psi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$$

$$\begin{cases} \psi(u_n) = 1 + g(u_n) = u_{n+1} \\ \psi(\alpha) = 1 + g(\alpha) = \alpha \end{cases}$$

لدينا : $\psi(u_n) = 1 + g(u_n) = u_{n+1}$
 $\psi(\alpha) = 1 + g(\alpha) = \alpha$

$$\exists c \in]u_n; \alpha[; \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$$

$$(*) \exists c \in]u_n; \alpha[; \left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \right| = |\psi'(c)|$$

لدينا : $c \in]u_n; \alpha[$ و $\psi'(c) = g'(c)$
 إذن : $c \geq 1$ أي : $1 \leq u_n < c < \alpha$
 ومنه حسب نتيجة السؤال (3) ب) من الجزء الثاني : $0 < g'(c) \leq \frac{1}{2}$

$$\text{إذن : } |\psi'(c)| = |g'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{أي : } (**) |\psi'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

إذن باستعمال الكاتبين (*) و (**). نكتب :

$$(\forall n \geq 0) ; \left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$



إذن : $(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$
 يعني : $(\forall x \geq 1) ; g'(x) < 1$
 ومنه : $(\forall x \geq 1) ; g'(x) - 1 < 0$
 أي : $(\forall x \geq 1) ; k'(x) < 0$
 وهذا يعني أن الدالة k تناقصية قطعاً على المجال $]1; +\infty[$.
 إذن k تقبل من المجال $]1; +\infty[$ نحو صورته بالدالة k .
 ولدينا $k(]1; +\infty[) = \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) ; k(1)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right)$
 $= \left(0 - 1 + \frac{1}{+\infty} \right) (+\infty) = (-1)(+\infty) = -\infty$
 وبالتالي : k تقبل من المجال $]1; +\infty[$ نحو المجال $] -\infty; \ln 2]$.

2 I

لدينا : $\ln 2 > 0$ إذن : $0 \in] -\infty; \ln 2]$
 وبما أن k تقبل من $]1; +\infty[$ نحو $] -\infty; \ln 2]$
 فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً بالدالة k في المجال $]1; +\infty[$.
 يعني بتعبير آخر : $\exists! \alpha \in]1; +\infty[; k(\alpha) = 0$
 يعني : $\exists! \alpha \in]1; +\infty[; g(\alpha) - \alpha + 1 = 0$
 يعني : $\exists! \alpha \in]1; +\infty[; 1 + g(\alpha) = \alpha$
 أو بتعبير لطيف : المعادلة $1 + g(x) = x$ تقبل حلاً وحيداً
 في المجال $]1; +\infty[$ و هو α .

1 II أ

باستعمال البرهان بالترجع ، نعتبر العبارة (P_n) التالية :
 $(P_n) : (\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$
 من أجل $n = 0$ لدينا حسب المعطيات : $1 \leq u_0 < \alpha$
 إذن : العبارة (P_0) صحيحة .
 ليكن $n \in \mathbb{N}$ ونفترض أن : $1 \leq u_n < \alpha$
 ندخل على هذا التاثير الدالة التزايدية قطعاً g نحصل على :
 $g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha)$
 ثم نضيف 1 لكل طرف : $g(1) + 1 \leq g(u_n) + 1 \leq g(\alpha) + 1$
 إذن : باستعمال النتائج السابقة نكتب : $1 < \ln 2 + 1 \leq u_{n+1} < \alpha$
 يعني : $1 \leq u_{n+1} < \alpha$ إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .
 حصلنا إذن على الوضعية التالية : $\{ (P_0) \text{ est vraie} \}$
 $\{ (P_n) \text{ implique } (P_{n+1}) ; \forall n \geq 0$

وبالتالي حسب مبدأ التراجع : $(P_n) \text{ est toujours vraie}$
 أي : $(\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$

1 II ب

لدينا حسب آخر نتيجة : $(\forall n \geq 0) ; u_n < \alpha$
 ندخل الدالة التناقصية قطعاً k على هذه المتفاوتة نجد :
 $(\forall n \geq 0) ; k(u_n) > k(\alpha)$
 وبما أن : $k(\alpha) = 0$ فإن : $k(u_n) > 0$: $(\forall n \geq 0)$
 يعني : $(\forall n \geq 0) ; g(u_n) - u_n + 1 > 0$
 يعني : $(\forall n \geq 0) ; 1 + g(u_n) > u_n$
 ومنه : $(\forall n \geq 0) ; u_{n+1} > u_n$
 ومن هذه الكلبة نستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً .





2 II ب

لدينا : $(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
إذن بتغيير $(n+1)$ بـ n نجد : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n-2} - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n-3} - \alpha| \\ &\quad \vdots \\ &\downarrow \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n} - \alpha| \end{aligned}$$

إذن : $(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

و يمكن كذلك استعمل البرهان بالترجع .

لنبرهن بالترجع على أن : $(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

من أجل $n = 0$ لدينا : $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$
إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و نفترض أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{2}$ نجد :

$$(\forall n \geq 0) ; \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

بما أن : $(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

فإن : $(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$

و هذا يعني أن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$.
وبالتالي حسب مبدأ الترجع :

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

2 II ج

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها عدد موجب قطعاً و أصغر من 1 .

إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

أو بتعبير واضح نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \geq 0) ; -\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \leq (u_n - \alpha) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \alpha) = 0$

أي : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$