التمرين الاول

$n\in\mathbb{N}^*; a_n = \underbrace{333...3}_{n\times}1$

1) لنتحقق من أن a_1 و a_2 أوليان

لدينا $a_1 = 31$ و 31 عدد أولي

لدينا $a_2 = 331$ و 331 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي مربعها أصغر منه أي (2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 و17)

إذن 331 عدد أولي

$\boxed{a_1 \text{ و } a_2 \text{ عددان أوليان}}$

2) لنبين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*); 3a_n + 7 = 10^{n+1}$

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}^*); a_n = 1+3\times10+3\times10^2+...+3\times10^n = 1+3(10+10^2+...+10^n)$

و $(\forall n\in\mathbb{N}^*); 10+10^2+...+10^n = 10\times\frac{1-10^n}{1-10} = \frac{10^{n+1}-10}{9}$ إذن $(\forall n\in\mathbb{N}^*); a_n = 1+\frac{10^{n+1}-10}{3} = \frac{10^{n+1}-7}{3}$

و منه $(\forall n\in\mathbb{N}^*); 3a_n + 7 = 10^{n+1}$

$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*); 3a_n + 7 = 10^{n+1}}$

3) لنبين أن $(\forall k\in\mathbb{N}); 10^{30k+2} \equiv 7[31]$

لدينا حسب 2) $10^2 - 7 = 3\times31$ إذن $10^2 \equiv 7[31]$

و لدينا $10^2 \equiv 7[31] \Rightarrow 10^3 \equiv 70 \equiv 8[31] \Rightarrow 10^6 \equiv 64 \equiv 2[31] \Rightarrow 10^{30} \equiv 32 \equiv 1[31] \Rightarrow 10^{30k} \equiv 1[31]$

و أخيرا $\begin{cases} 10^2 \equiv 7[31] \\ 10^{30k} \equiv 1[31] \end{cases} \Rightarrow 10^{30k+2} \equiv 7[31]$

$\boxed{(\forall k\in\mathbb{N}); 10^{30k+2} \equiv 7[31]}$

4) لنبين أن $(\forall n\in\mathbb{N}); 3a_{30k+1} \equiv 0[31]$ ثم لنستنتج أن 31 يقسم a_{30k+1}

لكل k من $\mathbb{N}$, $30k+1\in\mathbb{N}^*$ إذن حسب 2) $3a_{30k+1}+7 = 10^{30k+2}$ و حسب 3) $10^{30k+2} \equiv 7[31]$

إذن $3a_{30k+1}+7 \equiv 7[31]$ و منه $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$

و بما أن 31 يقسم $3a_{30k+1}$ و $31\wedge3 = 1$ فإن حسب مبرهنة كوص 31 يقسم a_{30k+1}

$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}); 3a_{30k+1} \equiv 0[31] \quad 31 \text{ يقسم } a_{30k+1}}$

5) لنبين أن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}^2$

لدينا $(n\in\mathbb{N}^*); n\equiv1[30] \Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}^*; n = 30k+1$

و منه حسب السؤال 4) 31 يقسم a_n أي أن $a_n \wedge 31 = 31$ و هذا يعني ان المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلول في $\mathbb{Z}^2$

(الشرط اللازم لكي تقبل هذه المعادلة حلول في $\mathbb{Z}^2$ هو $a_n \wedge 31 = 1$)

$\boxed{\text{المعادلة } a_n x + 31y = 1 \text{ لا تقبل حلول في } \mathbb{Z}^2}$

التمرين الثاني

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2; M(a,b)=\begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b\end{pmatrix} \text{ و } E=\left\{M(a,b)/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1) لنبين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

$\bullet I=M(1,0)\in E\Rightarrow E\neq\varnothing$

$$\bullet\left(\forall\left(M(a,b),M(c,d)\right)\in E^2\right); M(a,b)-M(c,d)=\begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a-c & a-b-c+d \\ b-d & a+b-c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & (a-c)-(b-d) \\ b-d & (a-c)+(b-d)\end{pmatrix}=M(a-c,b-d)\in E$$

و منه حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن :

$\boxed{E \text{ زمرة جزئية للزمرة } (M_2(\mathbb{R}),+)}$

2) لدينا $J^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و $1+0\neq 2$ إذن $J=M(1,0)\in E$ و $J^2\notin E$ نستنتج أن :

$\boxed{E \text{ جزء غير مستقر من } (M_2(\mathbb{R}),\times)}$

3) أ) لنبين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),*)$

لدينا

$$\left(\forall((a,b),(c,d))\in\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right)^2\right); \varphi((a+bi)\times(c+di))=\varphi(ac-bd+i(ad+bc))=M(ac-bd,ad+bc)$$

و لدينا

$$\varphi(a+bi)*\varphi(c+di)=M(a,b)*M(c,d)=\begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ac-ad-bc-bd \\ ad+bc & bc-bd+ac+ad\end{pmatrix}=M(ac-bd,ad+bc)$$

إذن $\left(\forall((a,b),(c,d))\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right); \varphi((a+bi)\times(c+di))=\varphi(a+bi)*\varphi(c+di)$

و منه

$\boxed{\varphi \text{ تشاكل من } (\mathbb{C}^*,\times) \text{ نحو } (M_2(\mathbb{R}),*)}$

ب) لنبين أن $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ حيث $E^*=E\setminus\{O\}$

لدينا: $M(a,b)\in E^*\Leftrightarrow(a,b)\neq(0,0)\Leftrightarrow a+bi\in\mathbb{C}^*\Leftrightarrow\varphi(a+bi)\in\varphi(\mathbb{C}^*)\Leftrightarrow M(a,b)\in\varphi(\mathbb{C}^*)$

إذن $M(a,b)\in E^*\Leftrightarrow M(a,b)\in\varphi(\mathbb{C}^*)$ و منه :

$\boxed{\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*}$

ج) لنبين أن $(E^*,*)$ زمرة تبادلية

لدينا $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية و φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),*)$ إذن $(\varphi(\mathbb{C}^*),*)$ زمرة تبادلية و لدينا $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

نستنتج أن

$\boxed{(E^*,*) \text{ زمرة تبادلية}}$

4) لدينا $\left(\forall (A,B,C)\in E^3\right), A*(B+C)=A\times N\times(B+C)=A\times N\times B+A\times N\times C=A*B+A*C$

إذن

$$\boxed{\left(\forall (A,B,C)\in E^3\right), A*(B+C)=A*B+A*C}$$

5) لنستنتج مما سبق أن $(E,+,*)$ جسم تبادلي.

لدينا حسب 1) $(E,+)$ زمرة وحدتها O و لدينا حسب 3) ج) $(E^*,*)$ زمرة تبادلية كما لدينا حسب 4) القانون $*$ توزيعي على القانون $+$

نستنتج أن

$\boxed{(E,+,*) \text{ جسم تبادلي}}$

التمرين الثالث

1) أ) لنتحقق من أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta=\left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$

لدينا : $(E): z^2-\sqrt{2}ie^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$ إذن $\Delta=\left(\sqrt{2}e^{i\theta}\right)^2-4e^{2i\theta}=2e^{2i\theta}-4e^{2i\theta}=-2e^{2i\theta}=\left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$

و منه

$$\boxed{\Delta=\left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2}$$

ب) لنكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي

بما أن $\Delta\neq 0$ فإن للمعادلة (E) حلين مختلفين هما : $z_1=\dfrac{\sqrt{2}e^{i\theta}-\sqrt{2}ie^{i\theta}}{2}=\left[1,-\dfrac{\pi}{4}\right]\times[1,\theta]=\left[1,\theta-\dfrac{\pi}{4}\right]$

و $z_2=\dfrac{\sqrt{2}e^{i\theta}+\sqrt{2}ie^{i\theta}}{2}=\left[1,\dfrac{\pi}{4}\right]\times[1,\theta]=\left[1,\theta+\dfrac{\pi}{4}\right]$ و منه

$$\boxed{z_1=\left[1,\frac{\pi}{4}-\theta\right] \quad \text{و} \quad z_2=\left[1,\frac{\pi}{4}+\theta\right]}$$

2) أ) لنبين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان :

لدينا $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{T_1T_2}}\right)\equiv Arg\left(\dfrac{aff\left(\overrightarrow{T_1T_2}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OA}\right)}\right)\equiv(2\pi)$ و $\dfrac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}-e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\theta}}=\dfrac{-2i\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}=-i=\left[1,-\dfrac{\pi}{2}\right]$

إذن $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{T_1T_2}}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ أي أن $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{T_1T_2}$ و منه

$\boxed{\text{المستقيمين } (T_1T_2) \text{ و } (OA) \text{ متعامدين}}$

ب) لنبين أن النقط O, A و K مستقيمية

لدينا $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OK}}\right)\equiv Arg\left(\dfrac{aff\left(\overrightarrow{OK}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OA}\right)}\right)(2\pi)$ و $\dfrac{aff\left(\overrightarrow{OK}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OA}\right)}=\dfrac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}}{2\sqrt{2}e^{i\theta}}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}=\left[\dfrac{1}{2},0\right]$

إذن $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OK}}\right)\equiv 0(2\pi)$ إي أن المتجهتين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OK}$ مستقيميتين و منه

$\boxed{\text{النقط } O \text{ و } A \text{ و } K \text{ مستقيمية}}$

ج) لنستنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$

لدينا (OA) عمودي على (T_1T_2) و لدينا K منتصف القطعة $[T_1T_2]$ و $K\in(OA)$
نستنتج أن

$\boxed{(OA) \text{ هو واسط القطعة } [T_1T_2]}$

3) أ) الصيغة العقدية للدوران r

لدينا $z'-e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z-e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$ يكافئ $z'=iz+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)}$ يكافئ $z'=iz+\sqrt{2}e^{i\theta}$

الصيغة العقدية للدوران r هي

$\boxed{z'=iz+\sqrt{2}e^{i\theta}}$

ب) لنتحقق من أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو $b=\sqrt{2}e^{i\theta}+1$

لدينا $b=i\times1+\sqrt{2}e^{i\theta}=\sqrt{2}e^{i\theta}+i$ و منه

$\boxed{b=\sqrt{2}e^{i\theta}+1}$

ج) لدينا $\overline{\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{AB}\right)}\equiv Arg\left(\frac{aff\left(\overrightarrow{AB}\right)}{aff\left(\overrightarrow{IJ}\right)}\right)(2\pi)$ و $\frac{b-\sqrt{2}e^{i\theta}}{-2}=\frac{-i}{2}=\left[\frac{1}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$

إذن $\overline{\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{AB}\right)}\equiv-\frac{\pi}{2}(2\pi)$ إي أن و بالتالي

$\boxed{\text{المستقيمين } (AB) \text{ و } (IJ) \text{ متعامدين}}$

4) لدينا $t_{-\vec{v}}(A)=C\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=-\vec{v}\Leftrightarrow z_C-\sqrt{2}e^{i\theta}=-i\Leftrightarrow z_C=-i+\sqrt{2}e^{i\theta}$

و منه لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $-\vec{v}$ هو

$\boxed{z_C=-i+\sqrt{2}e^{i\theta}}$

5) لدينا $\frac{z_C+z_B}{2}=\frac{-i+\sqrt{2}e^{i\theta}+i+\sqrt{2}e^{i\theta}}{2}=\sqrt{2}e^{i\theta}=z_A$

إذن

$\boxed{A \text{ هي منتصف القطعة } [BC]}$

التمرين الرابع

I) f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{-x\ln x}{1+x^2};x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) أ) الدالة $\ln$ متصلة على $]0,+\infty[$ و الدالة $x\mapsto\frac{-x}{1+x^2}$ متصلة على $\mathbb{R}$ (دالة جدرية معرفة على $\mathbb{R}$) و بالخصوص على $]0,+\infty[$

إذن الدالة f متصلة على $]0,+\infty[$ (جداء دالتين متصلتين)

لندرس اتصال f على اليمين في 0 : $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{-x\ln x}{1+x^2}=0=f(0)$ (لأن $\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$)

إذن f متصلة على يمين 0

f متصلة على $]0,+\infty[$ و متصلة على يمين 0 نستنتج أن

$$\boxed{f \text{ متصلة على المجال } [0,+\infty[}$$

ب) لندرس إشارة f على المجال $[0,+\infty[$

لدينا $f(0)=0$ و لكل $x>0$ إشارة $f(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$ ومنه جدول إشارة $f(x)$ كما يلي:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	

2) أ) لدينا :

$$(\forall x\in\mathbb{R}_+^*);f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\ln x}{x+\frac{1}{x}}=\frac{x\ln x}{x^2+1}=-f(x)$$

ومنه

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}_+^*);f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)}$$

ب) لنبين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

الدالة $\ln$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و الدالة $x\mapsto\frac{-x}{1+x^2}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $]0,+\infty[$

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ (كجداء دالتين قابلتين للإشتقاق على هذا المجال)

ج) لنبين أنه يوجد α من المجال $]0,1[$ يحقق $f'(\alpha)=0$

الدالة f متصلة على المجال $[0,1]$ و قابلة للإشتقاق على المجال $]0,1[$ وتحقق $f(0)=f(1)$ إذن حسب مبرهنة رول يوجد على الأقل عنصر α من المجال $]0,1[$ يحقق $f'(\alpha)=0$ إذن

$$\boxed{(\exists\alpha\in\,]0,1[);f'(\alpha)=0}$$

د) لنستنتج أن $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$

بما أن $\alpha\in]0,1[$ فإن $\frac{1}{\alpha}\in]1,+\infty[$ إذن f قابلة للاشتقاق عند $\frac{1}{\alpha}$

ولدينا حسب 2) أ) $(\forall x\in\mathbb{R}^*),f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$ نستنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R}^*),f'(x)=-f'\left(\frac{1}{x}\right)\times\frac{-1}{x^2}$

و منه $(\forall x\in\mathbb{R}^*),f'\left(\frac{1}{x}\right)=f'(x)\times\frac{1}{x^2}$ إذن $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha^2}f'(\alpha)=0$

و منه

$$\boxed{f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0}$$

II) F دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ ب: $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ و (C) مبيانها في معلم متعامد ممنظم.

1) ا) لنتحقق من أن $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);\frac{1}{2}\le\frac{t^2}{1+t^2}\le 1$

لدينا $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);0\le 1\le t^2\Rightarrow t^2\le 1+t^2\le 2t^2\Rightarrow\frac{1}{2}\le\frac{t^2}{1+t^2}\le 1$

و منه

$$\boxed{\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);\frac{1}{2}\le\frac{t^2}{1+t^2}\le 1}$$

ب) لنبين أن $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right),F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\le F(x)\le F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2$

انطلاقا من المتفاوتة المزدوجة السابقة لدينا الاستلزامات المتوالية التالية:

$$\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);\left(\frac{1}{2}\le\frac{t^2}{1+t^2}\le 1\right)\overset{\left(\frac{\ln t}{t}>0\right)}{\Rightarrow}\left(\frac{1}{2}\frac{\ln t}{t}\le\frac{t\ln t}{1+t^2}\le\frac{\ln t}{t}\right)\overset{(x\ge 1)}{\Rightarrow}\left(\int_1^x\frac{1}{2}\frac{\ln t}{t}dt\le\int_1^x\frac{t\ln t}{1+t^2}dt\le\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt\right)$$

و حيث أن $\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt=\left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^x=\frac{(\ln x)^2}{2}$ فإن $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);-\frac{(\ln x)^2}{2}\le-\int_1^x\frac{t\ln t}{1+t^2}dt\le-\frac{(\ln x)^2}{4}$

وبعد إضافة $F(1)$ إلى أطراف المتفاوتة المزدوجة الأخيرة نحصل على

$$\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);\mathrm{F}(1)-\frac{(\ln x)^2}{2}\le F(1)-\int_1^x\frac{t\ln t}{1+t^2}dt\le F(1)-\frac{(\ln x)^2}{4}$$

و بملاحظة أن $F(1)-\int_1^x\frac{t\ln t}{1+t^2}dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\int_0^x f(t)dt=F(x)$ نحصل على المطلوب:

$$\boxed{\left(\forall x\in[1,+\infty[\right),F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\le F(x)\le F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2}$$

ج) الحساب و التأويل الهندسي للنهايتين $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

لدينا حسب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\begin{cases}\left(\forall x\in[1,+\infty[\right),F(x)\le F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2\\ \lim_{x\to+\infty}F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2=-\infty\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$$

$$\begin{cases}\left(\forall x\in[1,+\infty[\right),\frac{F(1)}{x}-\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}\le\frac{F(x)}{x}\le\frac{F(1)}{x}-\frac{1}{4}\frac{(\ln x)^2}{x}\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{F(1)}{x}-\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(1)}{x}-\frac{1}{4}\frac{(\ln x)^2}{x}=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$$

خلاصة

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0}$ إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في إتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

2) أ) قابلية اشتقاق الدالة F على المجال $[0,+\infty[$ و حساب F'

بما أن f متصلة على المجال $[0,+\infty[$ فإن F هي أصليتها التي تنعدم عند 0 و منه F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$
و لدينا $\left(\forall x\in[0,+\infty[\right); F'(x)=f(x)$

F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ و لدينا $\left(\forall x\in[0,+\infty[\right); F'(x)=f(x)$

ب) نعلم حسب 1) أ) من الجزء الأول أن $f(x)>0$ على المجال $]0,1[$ و $f(x)<0$ على المجال $]1,+\infty[$
إذن جدول تغيرات الدالة F كما يلي

x	0		1		$+\infty$
$F(x)$	0	↗	$F(1)$	↘	$-\infty$

III) 1) أ) لنبين أن $\left(\forall t\in\ ]0,+\infty[\right); -t\ln t\leq \frac{1}{e}$

نضع $\left(\forall t\in]0,+\infty[\right); \varphi(t)=1+e.t\ln t$

لدينا $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$ و $\lim_{t\to0^+}\varphi(t)=1$ و $\left(\forall t\in]0,+\infty[\right); \varphi'(t)=e.(\ln t+1)$

إذن جدول تغيرات الدالة φ كما يلي

x	0		$1/e$		$+\infty$
$\varphi(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة φ نستنتج أن $\left(\forall t\in]0,+\infty[\right); \varphi(t)\geq 0$

$\left(\forall t\in]0,+\infty[\right); -t\ln t\leq\frac{1}{e}$

ب) لنبين أن : $\left(\forall t\in[0,+\infty[\right); f(t)\leq\frac{1}{e}$

إذا كان $t\geq1$ فإن $\left(\frac{-t\ln t}{1+t^2}\leq 0<\frac{1}{e}\right)$ و إذا كان $0<t<1$ فإن $\left(\begin{cases}0<-t\ln t\leq\frac{1}{e}\\ \frac{1}{1+t^2}<1\end{cases}\Rightarrow\frac{-t\ln t}{1+t^2}<\frac{1}{e}\Rightarrow f(t)<\frac{1}{e}\right)$

ومن أجل $t=0$: $f(0)=0<\frac{1}{e}$ نستنتج أن

$\left(\forall t\in[0,+\infty[\right); f(t)<\frac{1}{e}$

ج) استنتاج أن $(\forall x\in]0,+\infty[);F(x)<x$

لدينا $(\forall t\in [0,+\infty[);f(t)<\frac{1}{e}\Rightarrow (\forall x>0);\int_0^x f(t)dt\le\int_0^x\frac{1}{e}dt$

و لدينا $\int_0^x\frac{1}{e}dt=\frac{1}{e}[t]_0^x=\frac{x}{e}<x$ إذن

$$\boxed{(\forall x\in]0,+\infty[);F(x)<x}$$

(2

(u_n) متتالية معرفة ب : $\begin{cases}u_0\in]0,1[\\(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=F(u_n)\end{cases}$

أ) لنبين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\in]0,1[$

برهان بالترجع : لدينا $u_0\in]0,1[$ إذن العلاقة صحيحة من إجل $n=0$

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $u_n\in]0,1[$

بما أن F تزايدية قطعا على المجل $]0,1[$ فإن $0<u_n<1\Rightarrow F(0)<F(u_n)<F(1)<1\Rightarrow 0<u_{n+1}<1$

إذن $u_{n+1}\in]0,1[$. نستنتج (حسب مبدأ الترجع) أن

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N});u_n\in]0,1[}$$

ب) لنبين أن المتتالية تناقصية قطعا ثم نستنتج أنها متقاربة

بما أن $(\forall n\in\mathbb{N});u_n\in]0,1[$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N});F(u_n)<u_n$ حسب III 1) ج)

و منه $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}<u_n$

إذن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا

(u_n)تناقصية و مصغورة ب 0 إذن متقاربة

$$\boxed{(u_n)\ \text{متقاربة}}$$

ج) لنحسب نهاية المتتالية (u_n)

نضع $I=]0,1[$ الدالة F متصلة على I و لدينا $F(I)=]0,F(1)[\subset\left]0,\frac{1}{e}\right[\subset I$

إذن

$$\begin{cases}u_0\in]0,1[\\(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=F(u_n)\\(u_n)converge\end{cases}\overset{(u_n)\searrow}{\Rightarrow}\begin{cases}\lim u_n=l\\F(l)=l\\l\in I\cup\{0\}\end{cases}$$

لنحل في $I\cup\{0\}$ المعادلة $F(l)=l$

نعلم أن $(\forall x\in]0,+\infty[);F(x)<x$ إذن المعادلة ليس لها حل في I و بالتالي حلها الوحيد هو 0

$$\boxed{\lim u_n=0}$$

التمرين الخامس

g الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بمايلي $\begin{cases} g(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}; x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

1) لنبين أن الدالة g متصلة على $[0,+\infty[$

الدالتيان $x\mapsto\frac{-1}{x}$ و $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ متصلتان على $]0,+\infty[$ و الدالة exp متصلة على $\mathbb{R}$ إذن الدالة $x\mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ متصلة على $]0,+\infty[$

و بالتالي الدالة $x\mapsto\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}$ متصلة على $]0,+\infty[$ يعني الدالة g متصلة على $]0,+\infty[$

لندرس اتصال الدالة g على اليمين في 0

لدينا $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\overset{\left(t=\frac{-1}{x}\right)}{=}\lim\limits_{t\to-\infty}t^2e^t=0=g(0)$ إذن g متصلة على اليمين في 0

$\boxed{\text{نستنتج أن الدالة } g \text{ متصلة على } [0,+\infty[}$

2) $\forall\left(x\in[0,+\infty[\right); L(x)=\int_0^x g(t)\,dt$

أ) لنبين أن الدالة L متصلة على $[0,+\infty[$

بما أن الدالة g متصلة على $[0,+\infty[$ فإنها تقبل دوال أصلية عليه و دالتها الأصلية التي تنعدم عند 0 هي $\int_0^x g(t)\,dt$

إذن L هي أصلية g على المجال $[0,+\infty[$ و تحقق $L(0)=0$

ومنه L قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ما يعني أنها متصلة على $[0,+\infty[$

$\boxed{\text{الدالة } L \text{ متصلة على المجال } [0,+\infty[}$

ب) لنحسب $L(x)$ من أجل $x>0$

لدينا $(\forall x>0); L(x)=\int_0^x g(t)\,dt=\left[G(t)\right]_0^x=G(x)-G(0)$ حيث G أصلية ل g

و بما أن G متصلة على $[0,+\infty[$ فإن G معرفة كما يلي $\begin{cases} G(x)=e^{\frac{-1}{x}}; x>0 \\ G(0)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{-1}{x}}=0 \end{cases}$

نستنتج أن

$\boxed{(\forall x>0); L(x)=e^{\frac{-1}{x}}}$

ج) لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{-1}{x}}=0$ و بما أن L متصلة على اليمين في 0 فإن $L(0)=0$

3) لنبين أن المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و لنحدد نهايتها

لدينا $(\forall n\in\mathbb{N}^*);s_n=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

بما أن الدالة g متصلة على المجال $[0,1]$ فإن المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و لدينا $\lim s_n=\int_0^1 g(t)dt=L(1)=\frac{1}{e}$

$$\boxed{\lim s_n=\frac{1}{e}}$$

إضافة

مبيان الدوال f g و L