Yassine Mghazli

## التمرين الاول

-1 $E \subset M_3(\mathbb{R})$ و $E \neq \varnothing$ (لأن $0_{M_3(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E$ )

و لدينا
$$\left(\forall \left(M(x,y), M(a,b)\right) \in E^2\right); M(x,y) - M(a,b) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x-a)+(y-b) & 0 & -2(y-b) \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & (x-a)-(y-b) \end{pmatrix}$$

$$= M(x-a, y-b) \in E$$

إذن

$$\boxed{E \text{ زمرة جزئية للزمرة } \left(M_3(\mathbb{R}), +\right)}$$

-2 لدينا
$$\left(\forall \left(M(x,y), M(x',y')\right) \in E^2\right); M(x,y) \times M(x',y') = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') - 2yy' & 0 & -2y'(x+y) - 2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y') + y'(x-y) & 0 & -2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' + xy' + yx' - yy' & 0 & -2(xy' + yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ xy' + yx' & 0 & xx' - yy' - xy' - yx' \end{pmatrix}$$

$$= M(xx' - yy', xy' + yx')$$

إذن

$$\boxed{\left(\forall \left(M(x,y), M(x',y')\right) \in E^2\right); M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - yy', xy' + yx')}$$

*Yassine Mghazli*

-3 أ) $\left(\forall (z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2\right); \exists! \left((x,y),(x',y') \in \left(\mathbb{R}-\{(0,0)\}\right)^2\right) / \; z = x+iy$ و $z' = x'+iy'$

لدينا

$$\varphi(z\times z') = \varphi\left((x+iy)(x'+iy')\right)$$
$$= \varphi\left(xx'-yy'+i(xy'+yx')\right)$$
$$= M(xx'-yy', xy'+yx')$$
$$= M(x,y)\times M(x',y')$$
$$= \varphi(z)\times\varphi(z')$$

إذن

$\left(\forall (z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2\right) \; \varphi(z\times z') = \varphi(z)\times\varphi(z')$ و منه $\varphi$ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

ب) بما أن $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد 1 و $\varphi$ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

فإن $(\varphi(\mathbb{C}^*),\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $\varphi(1)$ و بما أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ و $\varphi(1) = \varphi(1+0i) = M(1,0)$

فإن

$(E^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $M(1,0)$

-4 لدينا $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية و $E$ زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}),+)$ إذن $(E,+)$ زمرة تبادلية

ولدينا حسب السؤال 2- $E$ جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ إذن $\times$ توزيعي على $+$ في $E$

نستنتج أن

$(E,+,\times)$ جسم تبادلي

-5 أ) لدينا

$$\left(\forall M(x,y)\in E\right); A\times M(x,y) = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\forall M(x,y)\in E\right); A\times M(x,y) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Yassine Mghazli

ب) نفترض أن ل $M(x,y)$ مماثلا في $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$ هو $M^{-1}$

$$A\times M(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A\times M(x,y)\right)\times M^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times M^{-1}$$

$$\Rightarrow A\times\left(M(x,y)\times M^{-1}\right)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

و هذا تناقض ومنه

$\boxed{\text{جميع عناصر } E \text{ لا تقبل مقلوبا في } \left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)}$

## التمرين الثاني

الجزء الاول

-1 لدينا $a^3+b^3\equiv 0[173] \Leftrightarrow 173\,|\,a^3+b^3$ إذن $a^3\equiv -b^3[173]$ و منه $\left(a^3\right)^{57}\equiv\left(-b^3\right)^{57}[173]$

و بالتالي

$\boxed{a^{171}\equiv -b^{171}[173]}$

-2 لدينا 173 أولي و $173\,|\,a$ إذن $(173\,|\,a^3\Leftrightarrow 173\,|\,a)$ و $(173\,|\,b^3\Leftrightarrow 173\,|\,b)$

و بما أن $173\,|\,a^3+b^3$ فإن $(173\,|\,a^3\Leftrightarrow 173\,|\,b^3)$

نستنتج أن

$\boxed{173\,|\,a\Leftrightarrow 173\,|\,b}$

-3 لدينا $((173\,|\,a\Rightarrow 173\,|\,b)$ و $173\,|\,a)$ ومنه $(173\,|\,a$ و $173\,|\,b)$

نستنتج أن $\boxed{173\,|\,a+b}$

-4 أ) لدينا 173 لايقسم $a$ إذن حسب-2 173لايقسم $b$ ومنه حسب مبرهنة فرما الصغرى $a^{172}\equiv 1[173]$ و $b^{172}\equiv 1[173]$

نستنتج أن

$\boxed{a^{172}\equiv b^{172}[173]}$

ب) لدينا $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$ و $a^{172}\equiv b^{172}[173]$ إذن $a^{172}\equiv -ba^{171}[173]$ ومنه

$\boxed{a^{171}(a+b)\equiv 0[173]}$

ج) بما أن 173 لايقسم $a$ فإن 173 لايقسم $a^{171}$ و بما أن 173 أولي فإن $173\wedge a^{171}=1$ و بما أن $173\,|\,a^{171}(a+b)$

فإن حسب مبرهنة كوص

$\boxed{173\,|\,a+b}$

Yassine Mghazli

الجزء الثاني

1- لكل x و y و k من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$\begin{cases} x+y=173k \\ x^3+y^3=173(xy+1) \end{cases} \Rightarrow \left(x^2-xy+y^2\right)173k=173(xy+1)$$

$$\Rightarrow k\left((x-y)^2+xy\right)=(xy+1)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2=1+xy(1-k)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy=1$$

إذن

$$\boxed{k(x-y)^2+(k-1)xy=1}$$

2- نفترض أن $k\neq 1$ حسب السؤال السابق لدينا $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

إذن $(*)k(x-y)^2=1-(k-1)xy$

وبما أن x و y و k من $\mathbb{N}^*$ فإن $k\geq 2$ و $xy\geq 1$ و منه $(k-1)xy\geq 1$ ما يستلزم أن $k(x-y)^2\leq 0$

أي أن $x=y$ المعادلة $(*)$ تصبح $(k-1)xy=1$ ما يستلزم أن $k-1=x=y=1$ و هذا تناقض مع كون $x+y=173k\geq 173$ إذن الافتراض الأول خاطئ وعكسه هو الصحيح : $\boxed{k=1}$

لدينا
$$(E)\Rightarrow \begin{cases}(x-y)^2=1\\ x+y=173\end{cases}\Rightarrow \left(\begin{cases}(x-y)=1\\ x+y=173\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}(x-y)=-1\\ x+y=173\end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases}2x=174\\ 2y=172\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}2x=172\\ 2y=174\end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases}x=87\\ y=86\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}x=86\\ y=87\end{cases}\right)$$

وعكسا لدينا $87^3+86^3=(86+87)\left(87^2-87\times 86+86^2\right)=173\left(87+86^2\right)=173(1+86\times 87)$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(E)$ هي

$$\boxed{S=\{(87,86);(86,87)\}}$$

## التمرين الثالث

-1 أ) لدينا $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1z_2-zz_2}{z_1z_2-zz_1}=\frac{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1+z_2\right)-2zz_2\right)}{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1+z_2\right)-2zz_1\right)}=\frac{z\left(z_1-z_2\right)}{z\left(z_2-z_1\right)}=-1$

إذن

$$\boxed{\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1}$$

ب) بما أن النقط $O$ و $M$ و $M_1$ و $M_2$ غير مستقيمية و $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2-0}{z_1-0}\in\mathbb{R}$ فإنها نقط متداورة ومنه

$\boxed{\text{النقطة } M \text{ تنتمي للدائرة المحيطة بالمثلث } OM_1M_2}$

-2 لدينا $\bar{z}=\frac{2\overline{z_1z_2}}{\overline{z_1+z_2}}=\frac{2\overline{z_1}\,\overline{z_2}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}}=\frac{2z_2\overline{\overline{z_2}}}{z_2+\overline{\overline{z_2}}}=\frac{2z_2z_1}{z_2+z_1}=z$ لأن و $\left(z_2=\overline{z_1}\quad z_1=\overline{z_2}\right)$

إذن $\bar{z}=z$ ومنه $z\in\mathbb{R}$ نستنتج أن

$\boxed{M \text{ تنتمي للمحور الحقيقي}}$

-3 أ) الصيغة العقدية الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\alpha$ هي: $z'=e^{i\alpha}z$ وبما أن صورة $M_1$ بهذا الدوران هي $M_2$ فإن

$$\boxed{z_2=e^{i\alpha}z_1}$$

ب) بما أن $z_1$ و $z_2$ مترافقين فإن $M_1$ و $M_2$ مثماثلين بالنسبة للمحور الحقيقي و منه منتصف القطعة $\left[M_1M_2\right]$ ينتمي للمحور الحقيقي

و بما أن $OM_1=OM_2$ فإن واسط القطعة $\left[M_1M_2\right]$ هو المحور الحقيقي نستنتج حسب السؤال 2- أن

$\boxed{M \text{ تنتمي لواسط القطعة } \left[M_1M_2\right]}$

-4 أ) $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة $6t^2-\left(e^{i\theta}+1\right)t+\left(e^{i\theta}-1\right)=0$ إذن $z_1+z_2=\frac{e^{i\theta}+1}{6}$ و $z_1z_2=\frac{e^{i\theta}-1}{6}$

إذن $z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=2\frac{\frac{e^{i\theta}-1}{6}}{\frac{e^{i\theta}+1}{6}}=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ و منه : $\boxed{z=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}}$

Yassine Mghazli

ب) لدينا $z=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}=2\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}=2\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=2i\tan\frac{\theta}{2}$

وبما أن $\theta\in]0,\pi[$ فإن $\frac{\theta}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و منه $\tan\frac{\theta}{2}>0$ نستنتج أن الشكل المثلثي ل $z$ هو

$$\boxed{z=\left[2\tan\frac{\theta}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$$

## التمرين الرابع

الجزء الأول

-1 لكل $x$ من $]0,+\infty[$ الدالة $\varphi:t\to e^{-t}$ متصلة على $[0,x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,x[$ إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

يوجد $\theta$ من $]0,x[$ بحيث $\varphi'(\theta)=\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}$ و بالتعويض نحصل على $\frac{e^{-x}-1}{x}=-e^{-\theta}$ ومنه $\frac{x}{1-e^{-x}}=e^{\theta}$

$$\boxed{(\forall x\in]0+\infty+\infty[);(\exists\theta\in]0,x[)/e^{\theta}=\frac{x}{1-e^{-x}}}$$

-2 أ) و ب) لدينا $(\forall x>0);0<\theta<x\Rightarrow 1<e^{\theta}<e^{x}\Rightarrow 1<\frac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$

$$\overset{(1-e^{-x}>0)}{\Longrightarrow} 1-e^{-x}<x<e^{x}\left(1-e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1-e^{-x}<x\\ x<e^{x}-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-x<e^{-x}\\ x+1<e^{x}\end{cases}$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>0);x+1<e^{x}\ \text{و}\ (\forall x>0);1-x<e^{-x}}$$

ج) لدينا $(\forall x>0);0<\theta<x\Rightarrow 1<e^{\theta}<e^{x}\Rightarrow 1<\frac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$

$$\Rightarrow 1<\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}<e^{x}\Rightarrow 0<\ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x$$

(لأن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ )و منه

$$\boxed{(\forall x>0);0<\ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x}$$

الجزء الثاني

1- أ) لدينا $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} e^x \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = 1\times\frac{1}{1} = 1 = f(1)$

إذن $f$ متصلة على اليمين في $0$

ب) لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{e^x-1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}} = 0$ لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}-\frac{1}{x} = +\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = 0$ ومنه ل $(C)$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$

2- أ) لدينا حسب 2-أ)من الجزء الأول: $(\forall t > 0); 1-t < e^{-t}$ إذن $(\forall t \geq 0); 1-t \leq e^{-t}$

إذن $(\forall x \geq 0); \int_0^x (1-t)\,dt \leq \int_0^x e^{-t}dt$

يستلزم $(\forall x \geq 0); \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq \left[-e^{-t}\right]_0^x$

ومنه

$$\boxed{(\forall x \geq 0); x-\frac{x^2}{2} \leq -e^{-x}+1}$$

ب) لدينا

$$(\forall x \geq 0); x-\frac{x^2}{2} \leq -e^{-x}+1 \Rightarrow (\forall x \geq 0); \begin{cases} e^{-x}+x-1 \leq \frac{x^2}{2} \\ \int_0^x t-\frac{t^2}{2}\,dt \leq \int_0^x \left(-e^{-t}+1\right)dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0); \begin{cases} e^{-x}+x-1 \leq \frac{x^2}{2} \\ \left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right]_0^x \leq \left[e^{-t}+t\right]_0^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0); \begin{cases} e^{-x}+x-1 \leq \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \leq e^{-x}+x-1 \end{cases}$$

Yassine Mghazli

ومنه

$$(\forall x>0);\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\le e^{-x}+x-1\le\frac{x^2}{2}$$

3- أ) لدينا

$$(\forall x>0);\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\frac{xe^x}{e^x-1}-1}{x}$$
$$=\frac{xe^x-e^x-1}{x(e^x-1)}$$
$$=\frac{x}{x^2(e^x-1)}\times e^x(x-1-e^{-x})$$
$$=\frac{f(x)}{x^2}(x-1-e^{-x})$$

إذن

$$(\forall x>0);\frac{f(x)-1}{x}=\frac{x-1-e^{-x}}{x^2}f(x)$$

ب) لدينا

$$(\forall x>0);\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\le e^{-x}+x-1\le\frac{x^2}{2}\Rightarrow(\forall x>0);\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\le\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\le\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow(\forall x>0);\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\le\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}f(x)\le\frac{1}{2}f(x)$$
$$\Rightarrow(\forall x>0);\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\le\frac{f(x)-1}{x}\le\frac{1}{2}f(x)$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}f(0)=\frac{1}{2}$

فإن

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}$ ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين في $0$ و $f_d'(0)=\frac{1}{2}$

4- أ) الدوال $x\to x$ و $x\to e^x$ و $x\to1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $]0,+\infty[$ إذن الدالتين $x\to xe^x$ و $x\to e^x-1$ قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بما أن $(\forall x>0);e^x-1\neq0$

فإن الدالة $x\to\frac{xe^x}{e^x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

Yassine Mghazli

خلاصة

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

لدينا
$$(\forall x>0);\ f'(x)=\frac{\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x-1\right)-xe^xe^x}{\left(e^x-1\right)^2}$$
$$=\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left(\left(x+1\right)\left(e^x-1\right)-xe^x\right)$$
$$=\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left(xe^x-x+e^x-1-xe^x\right)$$
$$=\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left(e^x-x-1\right)$$

إذن

$$(\forall x>0);\ f'(x)=\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left(e^x-x-1\right)$$

ب) حسب السؤال 2- ب) من الجزء الأول لدينا $(\forall x>0);x+1<e^x$

إذن $(\forall x>0);e^x-x-1>0$ و منه $(\forall x>0);\ f'(x)>0$

نستنتج أن الدالة $f$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

الجزء الثالث

1- برهان بالترجع على العلاقة "$(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0$"

لدينا $u_0>0$ إذن العلاقة صحيحة من اجل $n=0$

ليكن $n$ من $\mathbb{N}$ نفترض أن $u_n>0$ و نبين ان $u_{n+1}>0$

$n\in\mathbb{N};u_n>0\Rightarrow f\left(u_n\right)>f(0)\Rightarrow\ln\left(f\left(u_n\right)\right)>\ln\left(f(0)\right)$ (لأن $f$ و $\ln$ تزايديتين قطعا على $]0,+\infty[$
)

و بما أن $\ln\left(f(0)\right)=\ln(1)=0$ فإن $u_{n+1}>0$

حسب مبدأ الترجع نستنتج أن

$$(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0$$

Yassine Mghazli

-2 لدينا حسب السؤال 2- ج) $(\forall x>0);0<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)<x$

وبما أن $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N});0<\ln\left(\frac{u_ne^{u_n}}{e^{u_n}-1}\right)<u_n$

نستنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N});0<\ln(f(u_n))<u_n$ وبالتالي $(\forall n\in\mathbb{N});0<u_{n+1}<u_n$

إذن

$\boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ تناقصية قطعا و بما أنها مصغورة ب } 0 \text{ فهي إذن متقاربة}}$

-3 لدينا $(\forall x>0);e^x>x+1\Leftrightarrow e^x-1>x\Leftrightarrow\frac{x}{e^x-1}<1\Leftrightarrow\frac{xe^x}{e^x-1}<e^x\Leftrightarrow f(x)<e^x\Leftrightarrow\ln(f(x))<x$

و $\ln(f(0))=0$

إذن $\begin{cases}(\forall x>0);\ln(f(x))\neq x\\ \ln(f(0))=0\end{cases}$ و منه

$\boxed{0 \text{ هو الحل الوحيد للمعادلة } \ln(f(x))=x}$

المتتالية $(u_n)$ متقاربة و الدالة $\ln\circ f$ متصلة على $]0,+\infty[$ وتحقق $\ln\circ f(]0,+\infty[)\subset]0,+\infty[$

إذن نهايتها $l$ تحقق المعادلة $\ln(f(l))=l$ التي تقبل حلا وحيدا هو $0$ نستنتج أن

$\boxed{\lim u_n=0}$

## التمرين الخامس

-1 أ) لدينا $(\forall t\in]0,+\infty[);\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}>0$

إذن $(\forall x\in]0,\ln 2[);\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt<0$ و $(\forall x\in]\ln 2,+\infty[);\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt>0$

و منه إشارة $F(x)$ كما يلي

$\boxed{F(x) \text{ موجبة قطعا على المجال } ]\ln 2,+\infty[}$

$\boxed{F(x) \text{ سالبة قطعا على المجال } ]0,\ln 2[ \text{ و } F(\ln 2)=0}$

Yassine Mghazli

ب) الدالة $F$ هي أصلية الدالة $x \to \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم عند $\ln 2$

إذن $F$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا

$$\boxed{(\forall x \in ]0,+\infty[); F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}}$$

ج) لدينا $(\forall x \in ]0,+\infty[); F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} > 0$ إذن

$\boxed{\text{الدالة } F \text{ تزايدية قطعا على } ]0,+\infty[}$

2- أ) بوضع $u = \sqrt{e^t-1}$ يكون لدينا

$$\begin{cases} du = \frac{e^t}{2u}dt = \frac{u^2+1}{2u}dt \Leftrightarrow dt = \frac{2u}{u^2+1}du \\ t = x \Leftrightarrow u = \sqrt{e^x 91} \\ t = \ln 2 \Leftrightarrow u = 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt = \int_{1}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{u}\frac{2u}{u^2+1}du = \int_{1}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{2}{u^2+1}du$$

$$= 2[\arctan]_{1}^{\sqrt{e^x-1}} = 2\left(\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2}$$

إذن

$$\boxed{\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt = 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2}}$$

ب) لدينا $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2} = 2\arctan(0) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

و $\lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty} 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Yassine Mghazli

ومنه

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x)=\frac{\pi}{2} \text{ و } \lim_{x\to 0^+} F(x)=-\frac{\pi}{2}}$$

3- أ) $F$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ إذن متصلة عليه و بما أنها تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

فهي إذن تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $F(]0,+\infty[)$

و لدينا $F(]0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to 0^+}F(x),\lim_{x\to+\infty}F(x)\right[=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

إذن

$$\boxed{F \text{ تقابل من } ]0,+\infty[ \text{ نحو } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$$

ب)
$$(\forall y\in]0,+\infty[);\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\ F(y)=x\Leftrightarrow 2\arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)-\frac{\pi}{2}=x$$

$$\Leftrightarrow \arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^y-1}=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^y=1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

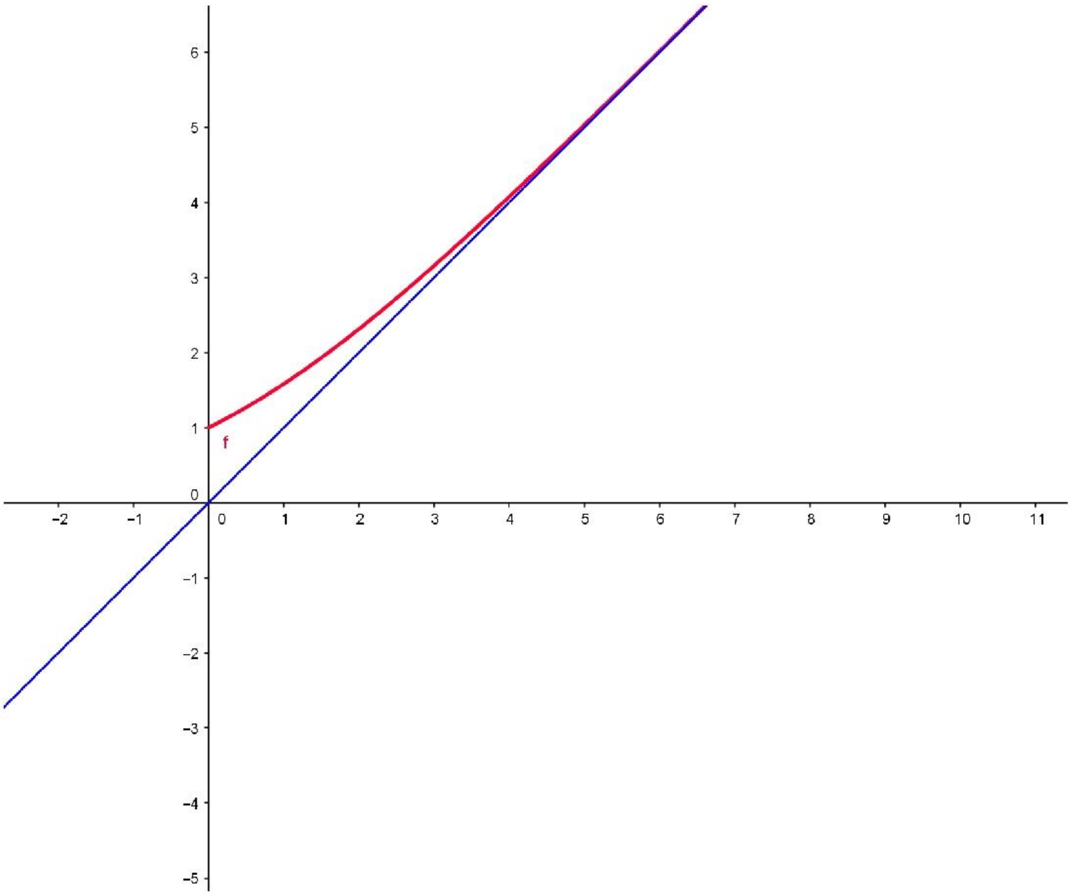
ومنه

$$\boxed{F \text{ تقابل من } ]0,+\infty[ \text{ نحو } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[ \text{ و } \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[;F^{-1}(x)=\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

Yassine Mghazli

## إضافة

مبيان الدالة f



Yassine Mghazli

مبيان الدالة F