DEBOURI MHAMED **Devoir**

Exercice 1

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2+p}$

1) montrer que

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 2-\frac{2}{n+1} \le U_n \le 2+\frac{2}{n}$

2) a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sqrt{n}-\sqrt{n-1} \ge \frac{1}{2n}$

b) en déduire $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \le 2\sqrt{n}$

3) on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) montrer que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 2n-4\sqrt{n+1} \le S_n \le 2n+4\sqrt{n}$

b) déterminer la limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 2

Soit $(U_n)_n$ une suite géométrique de raison q telle que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n \neq 0$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ On pose $S = U_0+U_1+.....+U_{n-1}$

$P = U_0U_1.......U_{n-1}$ et $T = \frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+.......+\frac{1}{U_{n-1}}$

Montrer que $\frac{S}{T} = U_0^2\ q^{n-1}$ déduire $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$

Exercice 3

On considère les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ telles que $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $V_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) montrer que $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont adjacentes

2) on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

a) montrer que $f_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$

b) prouver que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\quad f_{2n+1}(x) \le \arctan x \le f_{2n}(x)$

c) déduire la limite commune des suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$

Exercice 4

Soit n un entier supérieur à 3 . on considère la fonction $f_n(x) = x^n - n(x-1)-2$ définie sur $\mathbb{R}^+$

1) montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet deux solutions u_n et v_n avec $u_n<1<v_n$

2) a) étudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$

b) étudier la monotonie de $(u_n)_n$ en déduire qu'elle est convergente

c) montrer que $(\forall n \ge 3)$: $\frac{-2}{n} \le u_n - 1 \le \frac{-1}{n}$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) étudier la monotonie de $(v_n)_n$ et déduire qu'elle est convergente

4) a) montrer que $(\forall n \ge 3)\quad v_n > 1+\frac{1}{n}$ (on donne $(\forall n \ge 3)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$)

b) démontrer que $(\forall a>0)(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (1+a)^n \ge 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$

c) calculer $f_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ puis déduire $(\forall n \ge 3)\ v_n < 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$

d) déterminer la limite de la suite $(v_n)_n$

Exercice N°1 : (14 Points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x + 1 - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} & ; \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} & ; \text{ si } x < 0 \end{cases}$

et (C_f) la Courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Montrer que f est continue en 0
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
3. En utilisant le théorème des accroissements finis ; montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 0[)$; $x < \arctan(x) < \frac{x}{1+x^2}$
4. Etudier le dérivabilité de f en 0, puis donner une interprétation géomatique au résultat obtenu
5. (a) Montrer pour tout $x \in]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}$
   (b) Montrer que f est croissante sur $]-\infty; 0[$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$
6. étudier les branches infinies de (C_f); puis Construire (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
7. Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
   (b) Calculer $g(8)$; puis montrer que g^{-1} est dérivable en 3 et calculer $(g^{-1})'(3)$
8. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3} - f\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x^2}{9}A$ où A est un réel qui vérifie $h(1) = 0$
   (a) En utilisant le théorème de Rolle , montrer que : $(\exists c \in]0; 1[) / f'(c) - f'\left(\frac{c}{3}\right) = \frac{2}{3}cA$
   (b) En utilisant le théorème des accroissements finis ; déduire que : $(\exists b \in]0; 1[) / f''(b) = A$

Exercice N°2 : (6 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(1 + x)$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution a dans $\mathbb{R}$, tel que : $1 < a < 2$
2. Montrer que : $(\forall x \in [1; 2])$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{5}$
3. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$
   (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 < U_n < 2$; puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{5}|U_n - a|$
   (b) Déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite