

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si } x \in]-\infty, 2[\\ f(x) = \sqrt{x+2} + 10 & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

- 1) Calculer $f(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- 2) Est-ce que la fonction f est continue en 2 ?
- 3) Etudier la continuité de f sur \mathbb{R} .
- 4) Etudier la dérivabilité de f en 2, et interpréter géométriquement les résultats.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + 3x - 2$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α sur $[0; +\infty[$ et que $\alpha \in]0; 1[$.
- 2) Donner un encadrement d'amplitude $0,125$ de α .
- 3) En déduire que : $(\forall x \in [0; \alpha]); f(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [\alpha; +\infty]); f(x) \geq 0$
- 4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera, puis calculer $f(0)$; $f^{-1}(-2)$ et $(f^{-1})'(-2)$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$(C_f) \begin{cases} f(x) = 3 - 3x - x^3 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

et sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 1.
- 2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1. Puis Interpréter graphiquement les résultats.
- 3) calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty, 1[$.
- 4) Montrer que le point $I(0; 3)$ est un point d'inflexion de (C_f) .
- 5) Donner le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .
- 6) Etudier les branches infinies de (C_f) .
- 7) Ecrire une équation de la tangente à (C_f) au point I .
- 8) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty, 1[$ et que $\alpha \in]0; 1[$.
- 9) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 10) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera, puis tracer sa courbe dans le repère précédent.

Exercice 4 :

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

- Déterminer D_f , puis étudier les variations de f .
- Soit f la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty; -2]$, montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle que l'on précisera.
- Calculer $g^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right)$, puis déterminer $g^{-1}(x)$.

Exercice 5 :

On considère la fonction g définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

- Déterminer D_f , calculer les limites de la fonction aux bornes ouvertes de D_f .
- a - Vérifier que $(\forall x \in [0; +\infty[); \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$
b - En déduire que f est strictement croissante sur $I = [0; +\infty[$.
- Soit f la restriction de f sur l'intervalle I .
a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle à déterminer.
b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 6 :

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

- Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Soit f la restriction de f sur $I = [1; +\infty[$.
a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle que l'on précisera.
b) Donner le tableau de variation de f .
c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Montrer que l'équation $f(x) = x^2$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0; 1[$.
- Soit f la restriction de f sur l'intervalle $I = [4; +\infty[$

a) Montrer que f admet une fonction réciproque et préciser son domaine de définition.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 8 :

Calculer les limites suivantes.

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{5-x^3} + x$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x-1}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + x^2} - x}{x}$$

$$D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x}}{\sqrt{4x^2 + x}}$$

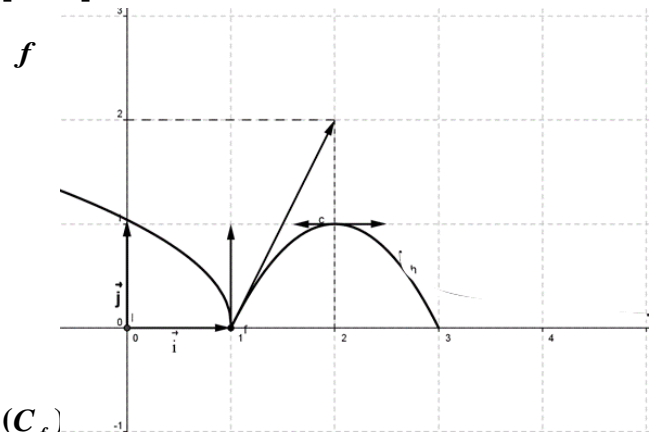
$$E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

$$F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

Rappel : $a+b = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$ et $a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

Exercice 9 :

La courbe ci dessous et celle d'une fonction f définie sur $]-\infty; 3]$.



- Déterminer $f'(2)$, (justifier)
- Donner $f_d'(1)$, (justifier)
- f est-elle dérivable à gauche en 1, justifier ?
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.
- Dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty; 3]$.

Exercice 10 :

Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$

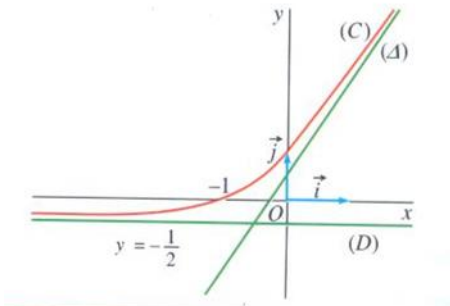
et sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

- Déterminer D_f , puis étudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f . Justifier les réponses !
- Etudier la parité de f et en déduire un élément de symétrie de D_f .
- Etudier les limites de f aux bornes du domaine D_f et en déduire les asymptotes éventuelles à D_f .

- 4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- 5) Etudier la concavité de f et résumer cette étude dans un tableau.
- 6) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à f au point d'abscisse 0.
- 7) Etudier la position de f par rapport à (T) .
- 8) Tracer f et (T) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 11 :

(C) désigne la courbe représentative d'une fonction dans un repère orthonormé.



- La droite $(D): y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
- La droite $(\Delta): y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

Par une lecture graphique.

- 1) Déterminer le signe de $f(x)$.
- 2) Déterminer le sens de variations de f .
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + \frac{1}{2})$.

Exercice 12 :

Soit une fonction tel que : $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2}$

Et sa courbe dans un repère orthonormé

- 1) Montrer que $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 4) a)- Montrer que : $(\forall x \in D_f); f(x) = x + 1 - \frac{x+1}{x^2}$
b)- Montrer que la droite $(\Delta): y = x + 1$ est une asymptote oblique à f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
- 5) a)- Montrer que :

$$(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{x(x+1)(x^2 - x + 2)}{x^4}$$

b)- Etudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le T.V.

- 6) Montrer que : $(\forall x \in D_f); f''(x) = \frac{-2(x+3)}{x^4}$ et étudier la concavité de f puis en déduire que f admet un point d'inflexion I .
- 7) Etudier la position relative de f et de (Δ) .
- 8) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe f au point d'abscisse 1.
- 9) Tracer la courbe f et la droite (T) .

Exercice 13 :

Partie 1 : Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) Vérifier que : $g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 3) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) > 0$.

Partie 2 : Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$$

- 1) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$.
- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq -1$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 4) Montrer que la droite $(D): y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à f au voisinage de $+\infty$.
- 5) Tracer, f et (D) dans un repère orthonormé.

Exercice 14:

Partie 1 : Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1$$

- 1) Montrer que g est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- 2) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

Partie 2 : Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2\sqrt{3 + x^2} - x$$

- 1) Etudier les branches infinies de f .
- 2) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = g(x)$, puis dresser le tableau de variation de f .
- 3) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe de f en son point d'abscisse -1.
- 4) Tracer la courbe f .