



Résumé de cours
et Astuces
de calcul d'intégrale
Prof Mohamed
DEBOURI 2 BPC
et S.V.T

- I/ Définition:
- II/ Méthodes de calculs:
- III/ interprétation géométrique.
- IV/ L'intégrale et L'ordre.
- V/ Calcul d'aire.

I) Définition f continue sur I
Primitive: F est une primitive
 de f sur I
 $\rightarrow F$ dérivable sur I
 $\rightarrow$ et $(\forall x \in I) F'(x) = f(x)$
 Exemple

(1) $f(x) = 2x \rightarrow F(x) = x^2 + C$
 (2) $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow F(x) = \ln|x| + C$
 (3) $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow F(x) = -\frac{1}{x^2+1} + C$
 $= \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

(4) $f(x) = \frac{x}{x^2+3} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+3}$
 $= \frac{1}{2} \frac{(x^2+3)'}{x^2+3}$
 $\ln x^2 = \ln x^2$

$F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + C$

(5) $f(x) = x e^{x^2} dx$
 $= \frac{1}{2} (2x) e^{x^2}$
 $= \frac{1}{2} (x^2)' e^{x^2}$
 $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$
 $(e^u)' = u' \cdot e^u$
 $\underbrace{\quad}_F$

(6) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}} = \frac{(2x+1)'}{\sqrt{2x+1}}$
 $F(x) = 2\sqrt{2x+1} + C$

(7) $f(x) = x \sqrt[3]{x^2+2}$
 $= x (x^2+2)^{\frac{1}{3}}$
 $= \frac{1}{2} (2x) (x^2+2)^{\frac{1}{3}}$
 $= \frac{1}{2} (x^2+2)' (x^2+2)^{\frac{1}{3}}$
 $u \cdot u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{3}+1} \cdot (x^2+2)^{\frac{1}{3}+1} + C$
 $= \frac{3}{8} (x^2+2)^{\frac{4}{3}} + C$

8) $f(x) = \cos(2x)$
 $F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

9) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
 $= \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$
 $= \ln'(x) \cdot \ln^1(x)$
 $F(x) = \frac{\ln^2(x)}{2}$

→ Soit f continue sur I et $a, b \in I$
 et F primitive de f sur I

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \left[F(x) \right]_a^b \\ = F(b) - F(a) \in \mathbb{R}$$

→ $\int k dx = \left[kx \right]$ Methode de
 • $\int x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]$ calcul

• $\int \frac{u'}{u} dx = \left[\ln|u| \right]$

• $\int u' \cdot e^u dx = \left[e^u \right]$

• $\int \frac{u'}{u^2} dx = \left[-\frac{1}{u} \right]$

• $\int u' \cdot u^n dx = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]$ $n \neq -1$
 (puissance et $\sqrt{\quad}$)

$\left\{ \frac{u'}{1+u^2} \rightarrow \text{Arctan } u. \text{ SC. Math) } \right\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} dx = \left[2\sqrt{u} \right]$

$\int \cos(ax+b) dx = \left[\frac{1}{a} \sin(ax+b) \right]$

$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \left[\cos(ax+b) \right]$

$\int u'(x) \times v'(u(x)) dx = \left[v(u(x)) \right]$

$\int 2x \cos(x^2+5) dx$

$= \int (x^2+5)' \sin'(x^2+5) dx = \left[\sin(x^2+5) \right]$

→ integration par partie

$\int_a^b u' \cdot v dx = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b v' \cdot u dx$

~~ALPES~~

↓ ↓ ↓
 ln poly exp sin et cos

$\int \frac{L \cdot P}{v \cdot u'} dx \rightarrow e^{\ln 2^2} = e^{\ln 4} = 4$

$\int \frac{S \cdot L}{u' \cdot v} \rightarrow$

$\int \frac{L \cdot e}{v \cdot u'} \rightarrow$

$e^{2 \ln 2} = e^{\ln 4} = 4$

Exemple

$I = \int_{DPE}^{\ln 2} x e^{2x} dx$

On pose $u' = e^{2x} \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} e^{2x}$
 $v = x \Leftrightarrow v' = 1$

$I = \left[\frac{1}{2} x e^{2x} \right]_0^{\ln 2} - \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$

$= \frac{1}{2} (\ln 2 \cdot e^{2 \ln 2} - 0) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\ln 2}$
 $= \frac{1}{2} \ln 2 \cdot 4 - \frac{1}{4} (4 - 1)$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 2x} ; x \in \mathbb{R}$$

(C_f) courbe de f (unité RON 1cm)

1) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$

$$xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$$

2) Montrer en utilisant une intégration par

parties que: $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$

3) Soit $A(E)$ l'aire, en cm^2 , du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Montrer que $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 2x} ; x \in \mathbb{R}$$

(C_f) courbe de f (unité RON 1cm)

1) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$

$$xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$$

2) Montrer en utilisant une intégration par

parties que: $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$

3) Soit $A(E)$ l'aire, en cm^2 , du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Montrer que $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 2} ; x \in \mathbb{R}$$

(C_f) courbe de f (unité RON 1cm)

1) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$

$$xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2} \leq \frac{1}{e-2}$$

2) Montrer en utilisant une intégration par

parties que: $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$

3) Soit $A(E)$ l'aire, en cm^2 , du domaine délimité par la courbe (C_f) , l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Montrer que $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$

$$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} ; x \in]0, +\infty[$$

Soient les deux intégrales :

$$I = \int_1^e (1 + \ln x) dx \quad J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$$

1) Montrer que $H: x \mapsto x \ln x$ est une primitive de $h: x \mapsto 1 + \ln x$, en déduire que : $I = e$

2) Montrer que : $J = 2e - 1$

3) Calculer $A = \int_1^e f(x) dx$

Ma
1°) $H: x \mapsto x \ln(x)$ est une primitive de $h: x \mapsto 1 + \ln(x)$
on a : Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$
donc H est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$(\forall x > 0) \quad H'(x) = (x \ln(x))' = (x)' \ln(x) + (\ln(x))' \cdot x$$

$$= \ln(x) + 1 = h(x)$$

d'où H est une primitive de h
En deduisant I

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e (1 + \ln(x)) dx \\ &= \int_1^e h(x) dx \\ &= [H(x)]_1^e \\ &= H(e) - H(1) \\ &= e \ln(e) - 1 \ln(1) \\ &= e \end{aligned}$$

$$2) \quad J = \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx$$

$$\text{on pose } U' = 1$$

$$\begin{aligned} V &= (1 + \ln(x))^2 \iff U = x \\ V' &= 2(1 + \ln(x))' (1 + \ln(x)) \\ &= \frac{2}{x} (1 + \ln(x)) \end{aligned}$$

Astuce
J: par

$$1 = x^\alpha \rightarrow P \\ (U^n)' = n \cdot U' \cdot U^{n-1}$$

$$\begin{aligned} J &= \left[x(1 + \ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e 1 + \ln(x) dx \\ &= (e(1 + \ln(e))^2 - 1) - 2I \\ &= 4e - 1 - 2e \\ &= 2e - 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} ; x \in]0, +\infty[$$

Soient les deux intégrales :

$$I = \int_1^e (1 + \ln x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$$

1) Montrer que $H : x \mapsto x \ln x$ est une primitive de $h : x \mapsto 1 + \ln x$, en déduire que : $I = e$

2) Montrer que : $J = 2e - 1$

3) Calculer $A = \int_1^e f(x) dx$

$$\begin{aligned}
 3) \quad A &= \int_1^e \left((1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx \\
 &= \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \\
 &= J + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e \\
 &= (2e - 1) + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) \\
 &= 2e - \frac{1}{e} = \frac{2e^2 - 1}{e}
 \end{aligned}$$

Exercice	.7	Site : maths-inter.ma -Bac 2014 - Ss1	
$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} \quad ; \quad x \in]0, +\infty[$		1) Montrer que $H : x \mapsto x \ln x$ est une primitive de $h : x \mapsto 1 + \ln x$, en déduire que : $I = e$	
Soient les deux intégrales :		2) Montrer que : $J = 2e - 1$	
$I = \int_1^e (1 + \ln x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$		3) Calculer $A = \int_1^e f(x) dx$	

Exercice	.7	Site : maths-inter.ma -Bac 2014 - Ss1	
$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} \quad ; \quad x \in]0, +\infty[$		1) Montrer que $H : x \mapsto x \ln x$ est une primitive de $h : x \mapsto 1 + \ln x$, en déduire que : $I = e$	
Soient les deux intégrales :		2) Montrer que : $J = 2e - 1$	
$I = \int_1^e (1 + \ln x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$		3) Calculer $A = \int_1^e f(x) dx$	

La fonction f est définie par: $f(x) = (xe^x - 1)e^x$

Montrer que:

$$I = \int_0^{1/2} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}, \text{ puis calculer } J = \int_0^{1/2} f(x) dx$$

La fonction f est définie par: $f(x) = (xe^x - 1)e^x$

Montrer que:

$$I = \int_0^{1/2} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}, \text{ puis calculer } J = \int_0^{1/2} f(x) dx$$

La fonction f est définie par: $f(x) = (xe^x - 1)e^x$

Montrer que:

$$I = \int_0^{1/2} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}, \text{ puis calculer } J = \int_0^{1/2} f(x) dx$$

La fonction f est définie par: $f(x) = (xe^x - 1)e^x$

Montrer que:

$$I = \int_0^{1/2} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}, \text{ puis calculer } J = \int_0^{1/2} f(x) dx$$

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

(C_f) courbe de f (unité RON 1cm)

- 1) Montrer que (C_f) est en dessous de la droite
 $(D) : y = 2x - 2$ sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$.

2) Montrer que : $I = \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$

- 3) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) , la droite (D) , l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = \ln 4$.

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x ; x \in \mathbb{R}$$

(C_f) courbe de f (unité RON 1cm)

- 1) Montrer que (C_f) est en dessous de la droite
 $(D): y = 2x - 2$ sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$.

2) Montrer que : $I = \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$

- 3) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) , la droite (D) , l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = \ln 4$.

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x ; x \in \mathbb{R}$$

(C_f) courbe de f (unité RON 1cm)

- 1) Montrer que (C_f) est en dessous de la droite
 $(D): y = 2x - 2$ sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$.

2) Montrer que : $I = \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$

- 3) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) , la droite (D) , l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = \ln 4$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1 : Calculez les intégrales suivantes .

$$I_1 = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \quad I_2 = \int_1^0 (x + e^x) dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \quad I_4 = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$$

$$I_5 = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} dx \quad I_6 = \int_1^2 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx$$

$$I_7 = \int_{-1}^1 x |x| dx \quad I_8 = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 + 2x - 5 dx$$

$$I_9 = \int_0^1 t(t^2 + 1)^3 dt \quad I_{10} = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad I_{12} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$I_{13} = \int_0^3 |2t-1| dt \quad I_{14} = \int_{-1}^5 |x-2| + |x-4| dt$$

$$I_{15} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dt \quad I_{16} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dt$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1 : Calculez les intégrales suivantes .

$$I_1 = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \quad I_2 = \int_1^0 (x + e^x) dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \quad I_4 = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$$

$$I_5 = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} dx \quad I_6 = \int_1^2 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx$$

$$I_7 = \int_{-1}^1 x |x| dx \quad I_8 = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 + 2x - 5 dx$$

$$I_9 = \int_0^1 t(t^2 + 1)^3 dt \quad I_{10} = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad I_{12} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$I_{13} = \int_0^3 |2t-1| dt \quad I_{14} = \int_{-1}^5 |x-2| + |x-4| dt$$

$$I_{15} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dt \quad I_{16} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dt$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1 : Calculez les intégrales suivantes .

$$I_1 = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \quad I_2 = \int_1^0 (x + e^x) dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \quad I_4 = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$$

$$I_5 = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} dx \quad I_6 = \int_1^2 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx$$

$$I_7 = \int_{-1}^1 x |x| dx \quad I_8 = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 + 2x - 5 dx$$

$$I_9 = \int_0^1 t(t^2 + 1)^3 dt \quad I_{10} = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad I_{12} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$I_{13} = \int_0^3 |2t-1| dt \quad I_{14} = \int_{-1}^5 |x-2| + |x-4| dt$$

$$I_{15} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dt \quad I_{16} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dt$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1 : Calculez les intégrales suivantes .

$$I_1 = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \quad I_2 = \int_1^0 (x + e^x) dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \quad I_4 = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$$

$$I_5 = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} dx \quad I_6 = \int_1^2 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx$$

$$I_7 = \int_{-1}^1 x |x| dx \quad I_8 = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 + 2x - 5 dx$$

$$I_9 = \int_0^1 t(t^2 + 1)^3 dt \quad I_{10} = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad I_{12} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$I_{13} = \int_0^3 |2t-1| dt \quad I_{14} = \int_{-1}^5 |x-2| + |x-4| dt$$

$$I_{15} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dt \quad I_{16} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dt$$

EXERCICE2 :

Calculer les intégrales suivantes par la méthode d'intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx$$

$$I_2 = \int_1^e x \ln x dx$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$I_5 = \int_1^x \ln t dt$$

$$I_6 = \int_0^1 x \sqrt{1+x} dx$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$I_9 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$I_{10} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$I_{11} = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$$I_{12} = \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$I_{13} = \int_0^x \cos t \cdot e^t dt$$

$$I_{14} = \int_0^x \sin t \cdot e^t dt$$

$$I_{15} = \int_1^{e^2} (x^3 + 1) \ln(x) dx$$

EXERCICE2 :

Calculer les intégrales suivantes par la méthode d'intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx$$

$$I_2 = \int_1^e x \ln x dx$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$I_5 = \int_1^x \ln t dt$$

$$I_6 = \int_0^1 x \sqrt{1+x} dx$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$I_9 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$I_{10} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$I_{11} = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$$I_{12} = \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$I_{13} = \int_0^x \cos t \cdot e^t dt$$

$$I_{14} = \int_0^x \sin t \cdot e^t dt$$

$$I_{15} = \int_1^{e^2} (x^3 + 1) \ln(x) dx$$

EXERCICE2 :

Calculer les intégrales suivantes par la méthode d'intégration par parties :

$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx$$

$$I_2 = \int_1^e x \ln x dx$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$I_5 = \int_1^x \ln t dt$$

$$I_6 = \int_0^1 x \sqrt{1+x} dx$$

$$I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$I_9 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$I_{10} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$I_{11} = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$$I_{12} = \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$I_{13} = \int_0^x \cos t \cdot e^t dt$$

$$I_{14} = \int_0^x \sin t \cdot e^t dt$$

$$I_{15} = \int_1^{e^2} (x^3 + 1) \ln(x) dx$$

EXERCICE 5 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}$.

1) Etudier les variations de f .

2) En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right) : 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3) a) Vérifier que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right) : 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

b) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)}$$

c) Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$.

d) Montrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

calculer $\int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \int \frac{1}{(x-1)(x+3)}$

$x = 1$ et $x = -3$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[\ln|x-1| - \ln|x+3| \right]$$

$$= \int \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} \right) dx$$

$$\frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{x+3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)}$$

$$\frac{a(x+3) + b(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(a+b)x + 3a - b}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+3)}$$

$$(a+b)x + 3a - b = 1 = 0 \cdot x + 1$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ 4a=1 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

1°) $\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right)$

$$ax + b = a'x + b'$$

2°) Calculer $\int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$

EXERCICE5 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}$.

1) Etudier les variations de f .

2) En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right) : 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3) a) Vérifier que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right) : 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

b) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)}$$

c) Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$.

d) Montrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

EXERCICE6 :

EXERCICE5 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}$.

1) Etudier les variations de f .

2) En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right) : 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3) a) Vérifier que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right) : 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

b) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)}$$

c) Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$.

d) Montrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

EXERCICE 9 :

a- Vérifier que pour tout réel x on a :

$$\frac{1}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

b- En déduire la valeur de $J = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)^2}$.

c- A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale suivant $K = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x + 1)^3} dx$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(e^x + 1)^2 - e^x(e^x + 1) - e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{1}{(e^x + 1)^2}$$

$$b/ J = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \right) dx$$

$$= \left[x - \ln(e^x + 1) + \frac{1}{e^x + 1} \right]_0^1$$

$$= 1 - \ln(e + 1) + \frac{1}{e + 1} + \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$J = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{2}{e + 1}\right) + \frac{1}{e + 1}$$

$$c) K = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x + 1)^3} dx$$

$$U' = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} = e^x (e^x + 1)^{-3}$$

$$V = x \iff V' = 1$$

$$\begin{array}{l} U' = x \rightarrow U = \frac{x^2}{2} \\ V = \frac{x^2}{(e^x + 1)^2} \end{array}$$

$$U = \frac{(e^x + 1)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(e^x + 1)^2}$$

EXERCICE9 :

a- Vérifier que pour tout réel x on a :

$$\frac{1}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

b- En déduire la valeur de $J = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)^2}$.

c- A l'aide d'une intégration par parties, calculer

l'intégrale suivant $K = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x + 1)^3} dx$

$$U' = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} \longrightarrow U = -\frac{1}{2} \frac{1}{(e^x + 1)^2}$$

$$V = x \longrightarrow V' = 1$$

$$c) \quad K = \left[-\frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(e+1)^2} - 0 + \frac{1}{2} J$$

$$K = -\frac{1}{2} \frac{1}{(e+1)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right) + \frac{1}{e+1} \right)$$

Exercice 38: Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$

par $(\forall t \in]0, +\infty[) (f(t) = e^{\frac{1}{\ln t}})$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

2) Considérons la fonction définie sur $]1, +\infty[$

par : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$

a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[)$:

$(f(x+1) \leq F(x) \leq f(x))$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

3) a) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[) (e^t \geq t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x > 1) : \ln$

$F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$

4) a) Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[) (\ln t \leq t-1)$

b) En déduire que $(\forall x > 1) (F(x) - 1 \geq \ln \left(\frac{x}{x-1} \right))$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$

Exercice 38: Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$

par $(\forall t \in]0, +\infty[) (f(t) = e^{\frac{1}{\ln t}})$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

2) Considérons la fonction définie sur $]1, +\infty[$

par : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$

a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[) :$

$(f(x+1) \leq F(x) \leq f(x))$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

3) a) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[) (e^t \geq t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x > 1) : \ln$

$F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$

4) a) Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[) (\ln t \leq t-1)$

b) En déduire que $(\forall x > 1) (F(x) - 1 \geq \ln \left(\frac{x}{x-1} \right))$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$

Exercice 38: Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$

par $(\forall t \in]0, +\infty[) (f(t) = e^{\frac{1}{\ln t}})$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

2) Considérons la fonction définie sur $]1, +\infty[$

par : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$

a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[) :$

$(f(x+1) \leq F(x) \leq f(x))$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

3) a) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[) (e^t \geq t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x > 1) : \ln$

$F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$

4) a) Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[) (\ln t \leq t-1)$

b) En déduire que $(\forall x > 1) (F(x) - 1 \geq \ln \left(\frac{x}{x-1} \right))$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$

Exercice 38: Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$

par $(\forall t \in]0, +\infty[) (f(t) = e^{\frac{1}{\ln t}})$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

2) Considérons la fonction définie sur $]1, +\infty[$

par : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$

a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[) :$

$(f(x+1) \leq F(x) \leq f(x))$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

3) a) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[) (e^t \geq t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x > 1) : \ln$

$F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$

4) a) Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[) (\ln t \leq t-1)$

b) En déduire que $(\forall x > 1) (F(x) - 1 \geq \ln \left(\frac{x}{x-1} \right))$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$

Exercice 38: Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$

par $(\forall t \in]0, +\infty[) (f(t) = e^{\frac{1}{\ln t}})$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

2) Considérons la fonction définie sur $]1, +\infty[$

par : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$

a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[)$:

$(f(x+1) \leq F(x) \leq f(x))$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

3) a) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[) (e^t \geq t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x > 1) : \ln$

$F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$

4) a) Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[) (\ln t \leq t-1)$

b) En déduire que $(\forall x > 1) (F(x) - 1 \geq \ln \left(\frac{x}{x-1} \right))$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$