

Résumé de cours
et Astuces
de calcul d'intégrale

Prof Mohamed

DEBOURI

2 BPC
et S.V.T

I/ Définition:

II/ Méthodes de calculs:

III/ interprétation géométrique.

IV/ L'intégrale et L'ordre.

V/ Calcul d'aire.

(I) Définition f continue sur I
Primitive: F est une primitive
de f sur I

→ F dérivable sur I

→ et $(\forall x \in I) \quad F'(x) = f(x)$

Exemple:

$$(1) f(x) = 2x \longrightarrow F(x) = x^2 + C$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow F(x) = \ln|x| + C$$

$$(3) f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \longrightarrow F(x) = -\frac{1}{x^2+1} + C$$

$$= \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$(4) f(x) = \frac{x}{x^2+3} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+3}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2+3)'}{x^2+3}, \quad \ln x^2 = \ln x$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + C$$

$$(5) f(x) = x e^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} (2x) e^{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} (x^2)' e^{x^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_F$

$$(6) f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}} = \frac{(2x+1)'}{\sqrt{2x+1}}$$

$$F(x) = 2\sqrt{2x+1} + C$$

$$(7) f(x) = x \sqrt[3]{x^2+2}$$

$$= x (x^2+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} (2x) (x^2+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} (x^2+2)' (x^2+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$u \cdot u^n \longrightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{3}+1} \cdot (x^2+2)^{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{3}{8} (x^2+2)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$(8) f(x) = \cos(2x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$(9) f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$$

$$= \ln'(x) \cdot \ln^1(x)$$

$$F(x) = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

→ Soit f continue sur I et $a, b \in I$
et F primitive de f sur I

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \left[F(x) \right]_a^b \\ = F(b) - F(a) \in \mathbb{R}$$

→ $\int k dx = \left[kx \right]$ Methode de
 $\int x^r dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} \right]$ calcul

$\int \frac{u'}{u} dx = \left[\ln|u| \right]$ $\Delta x = x_1 - x_2$
 $dx =$

$\int u' \cdot e^u dx = \left[e^u \right]$

$\int \frac{u'}{u^2} dx = \left[-\frac{1}{u} \right]$

$\int u' \cdot u^n dx = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]$ $n \neq -1$
(puissance et $\sqrt{\quad}$)

$\left\{ \frac{u'}{1+u^2} \rightarrow \text{Arctan } u. \text{ SC. Math) } \right\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} dx = \left[2\sqrt{u} \right]$

$\int \cos(ax+b) dx = \left[\frac{1}{a} \sin(ax+b) \right]$

$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \left[\cos(ax+b) \right]$

$\int u'(x) \cdot v(x) dx = \left[v(u(x)) \right]$

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \left[e^{ax} \right]$

$\int 2x \cos(x^2+5) dx$

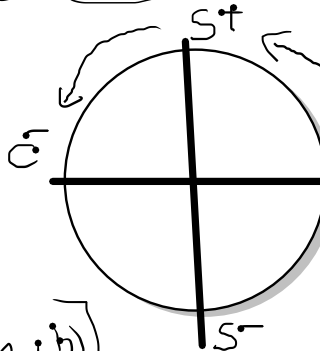
$= \int (x^2+5)' \sin(x^2+5) dx = \left[\sin(x^2+5) \right]$

→ integration par partie

$\int_a^b u' \cdot v dx = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b v' \cdot u dx$

① ② ③ ④ ⑤
~~ALPES~~

ln poly exp sin et cos



$\int \frac{L.P. dx}{v \cdot u'} \rightarrow$

$e^{\ln 2^2} = e^{\ln 4} = 4$

$\int \frac{S.L}{u' \cdot v} \rightarrow$

$e^{2 \ln 2} = e^{\ln 4} = 4$

$\int \frac{L.e.}{v \cdot u'} \rightarrow$

Exemple

$x \ln x - x$

$I = \int_0^{\ln 2} x e^{2x} dx$
D P E

On pose $u' = e^{2x} \Leftrightarrow u = \frac{1}{2} e^{2x}$
 $v = x \Leftrightarrow v' = 1$

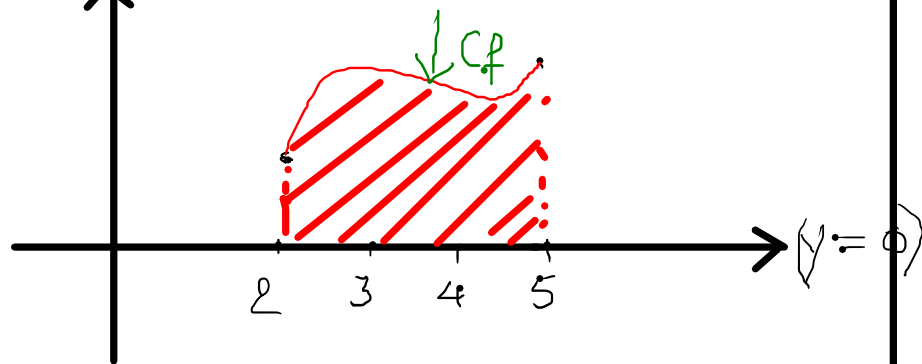
$I = \left[\frac{1}{2} x e^{2x} \right]_0^{\ln 2} - \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$

$= \frac{1}{2} (\ln 2 \cdot e^{2 \ln 2} - 0) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\ln 2}$
 $= \frac{1}{2} \ln 2 \cdot 4 - \frac{1}{4} (4 - 1)$

* interprétation Géométrique

$$\int_2^5 f(x) dx = 4 \quad \text{avec } f > 0$$

(x=0)



$\int_2^5 f(x) dx$: C'est l'aire de la partie du plan délimitée par (Cf) et les droites d'éq $x=2$ et $x=5$ et l'axe (Ox)

* L'intégrale et l'ordre

$$\rightarrow a < b \text{ et } f > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$$

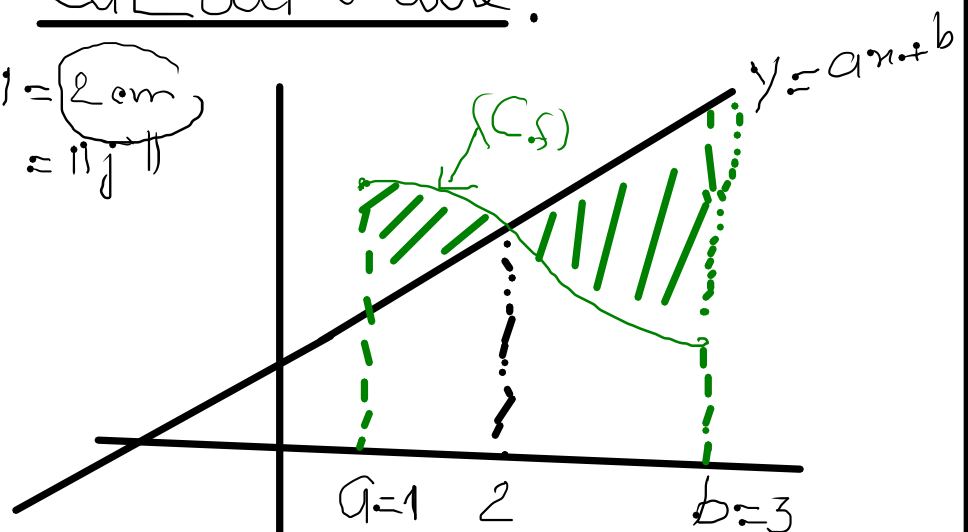
$$\rightarrow a < b \text{ et } f > g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$$

$$\rightarrow a < b \text{ et } g \leq f \leq h \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx$$

$$\rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

* Calcul d'aire :

$$\| \vec{x} \| = 2 \text{ cm} = \| \vec{y} \|$$



l'aire du domaine du plan délimité par : (Cf) et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ et $y = ax + b$ est égale à :

$$A = \int_a^b |f(x) - y| dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{unité d'aire} \\ \| \vec{x} \|^2 \end{array} \right.$$

$f(x) - y > 0$ $f(x) - y < 0$

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$| \sum a_i | \leq \sum |a_i|$$

Fin du cours.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 |f(x) - y| dx = 4 \\ &= 4 \left(\int_1^2 (f(x) - y) dx - \int_2^3 (f(x) - y) dx \right) \\ &\quad \text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}; x \in \mathbb{R}$$

(C_f) courbe de f (unité NON 1cm)

[0, 1]

1) Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0, +∞[

$$xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2} \quad \checkmark$$

2) Montrer en utilisant une intégration par

parties que: $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$

3) Soit A(E) l'aire, en cm², du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives x=0 et x=1.

Montrer que $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2} \quad \checkmark$

Réponse : Soit $x > 0$

$$\rightarrow xe^{-x} = \frac{x}{e^x - 2x} = \frac{x}{e^x} - \frac{x}{e^x - 2x}$$

$$= x \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x - 2x} \right)$$

$$= x \left(\frac{e^x - 2x - e^x}{e^x(e^x - 2x)} \right)$$

$$= \frac{-2xe^x}{e^x(e^x - 2x)}$$

$$b \leq c$$

On a: $\forall x > 0, e^x - 2x > 0$

d'où:

$$xe^{-x} - \frac{x}{e^x - 2x} \leq 0$$

d'où $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x}$

La même chose à refaire)

$$\int_0^1 xe^{-x} dx$$

On pose $u' = e^{-x}$

$v = x$

$\longleftrightarrow u = -e^{-x}$

$\longleftrightarrow v' = 1$

d'où d'après I.P.P

$$\int_0^1 xe^{-x} dx = \left[-xe^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= -1e^{-1} - 0 - \left[e^{-x} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{e} - (e^{-1} - e^0)$$

$$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$$

$$= 1 - \frac{2}{e}$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 2x} ; x \in \mathbb{R}$$

(C_f) courbe de f (unité RON 1cm)

1) Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$

$$xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$$

2) Montrer en utilisant une intégration par

parties que: $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$

3) Soit $A(E)$ l'aire, en cm^2 , du domaine délimité par la courbe (C_f) , l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Montrer que $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$

$$y=0$$

 $\Rightarrow$

$$\int_0^1 xe^{-x} dx \leq A(E) \leq \int_0^1 \frac{1}{e-2} dx$$

 $\Leftrightarrow$

$$1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \left[\frac{1}{e-2} \cdot x \right]_0^1$$

 $\Leftrightarrow$

$$1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$$

3°/ L'aire est :

$$A(E) = \int_0^1 |f(x)| dx$$

puisque $\forall x \in [0, 1], f(x) > 0$

=

$$\text{Ainsi } A(E) = \int_0^1 f(x) dx$$

et on a : $\forall x \in [0, 1]$

$$xe^{-x} \leq f(x) \leq \frac{1}{e-2}$$

$$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} ; x \in]0, +\infty[$$

Soient les deux intégrales :

$$I = \int_1^e (1 + \ln x) dx \quad J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$$

1) Montrer que $H: x \mapsto x \ln x$ est une primitive de $h: x \mapsto 1 + \ln x$, en déduire que : $I = e$

2) Montrer que : $J = 2e - 1$

3) Calculer $A = \int_1^e f(x) dx$

Ma
1°) $H: x \mapsto x \ln(x)$ est une primitive de $h: x \mapsto 1 + \ln(x)$
on a : Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$
donc H est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$(\forall x > 0) \quad H'(x) = (x \ln(x))' = (x)' \ln(x) + (\ln(x))' \cdot x$$

$$= \ln(x) + 1 = h(x)$$

$\therefore H$ est une primitive de h
En deduire I

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e (1 + \ln(x)) dx \\ &= \int_1^e h(x) dx \\ &= [H(x)]_1^e \\ &= H(e) - H(1) \\ &= e \ln(e) - 1 \ln(1) \\ &= e \end{aligned}$$

$$2) \quad J = \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx$$

$$\text{on pose } U' = 1$$

$$\begin{aligned} V &= (1 + \ln(x))^2 \iff U = x \\ V' &= 2(1 + \ln(x))' (1 + \ln(x)) \\ &= \frac{2}{x} (1 + \ln(x)) \end{aligned}$$

Astuce
 J : par

$$1 = x^\infty \rightarrow P \\ (U^n)' = n \cdot U' \cdot U^{n-1}$$

$$\begin{aligned} J &= \left[x (1 + \ln(x))^2 \right]_1^e - \int_1^e 1 + \ln(x) dx \\ &= (e (1 + \ln(e))^2 - 1) - 2I \\ &= 4e - 1 - 2e \\ &= 2e - 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} ; x \in]0, +\infty[$$

Soient les deux intégrales :

$$I = \int_1^e (1 + \ln x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$$

1) Montrer que $H : x \mapsto x \ln x$ est une primitive de $h : x \mapsto 1 + \ln x$, en déduire que $I = e$

2) Montrer que $J = 2e - 1$

3) Calculer $A = \int_1^e f(x) dx$

$$\begin{aligned}
 3) \quad A &= \int_1^e \left((1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx \\
 &= \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \\
 &= J + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e \\
 &= (2e - 1) + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) \\
 &= 2e - \frac{1}{e} = \frac{2e^2 - 1}{e}
 \end{aligned}$$

Exercice	.7	Site : maths-inter.ma -Bac 2014 - Ss1	
$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2} \quad ; x \in]0, +\infty[$ Soient les deux intégrales : $I = \int_1^e (1 + \ln x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$		1) Montrer que $H : x \mapsto x \ln x$ est une primitive de $h : x \mapsto 1 + \ln x$, en déduire que : $I = e$ 2) Montrer que : $J = 2e - 1$ 3) Calculer $A = \int_1^e f(x) dx$	

La fonction f est définie par: $f(x) = (xe^x - 1)e^x$

Montrer que:

$$I = \int_0^{1/2} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}, \text{ puis calculer } J = \int_0^{1/2} f(x) dx$$

La fonction f est définie par: $f(x) = (xe^x - 1)e^x$

Montrer que:

$$I = \int_0^{1/2} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}, \text{ puis calculer } J = \int_0^{1/2} f(x) dx$$

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x ; x \in \mathbb{R}$$

(C_f) courbe de f (unité RON 1cm)

- 1) Montrer que (C_f) est en dessous de la droite
 $(D) : y = 2x - 2$ sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$.

2) Montrer que : $I = \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$

- 3) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) , la droite (D) , l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = \ln 4$.

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x ; x \in \mathbb{R}$$

(C_f) courbe de f (unité RON 1cm)

- 1) Montrer que (C_f) est en dessous de la droite
 $(D): y = 2x - 2$ sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$.

2) Montrer que : $I = \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$

- 3) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) , la droite (D) , l'axe (Oy) et la droite d'équation $x = \ln 4$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1 : Calculez les intégrales suivantes .

$$I_1 = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \quad I_2 = \int_1^0 (x + e^x) dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \quad I_4 = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$$

$$I_5 = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} dx \quad I_6 = \int_1^2 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx$$

$$I_7 = \int_{-1}^1 x |x| dx \quad I_8 = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 + 2x - 5 dx$$

$$I_9 = \int_0^1 t(t^2 + 1)^3 dt \quad I_{10} = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad I_{12} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$I_{13} = \int_0^3 |2t-1| dt \quad I_{14} = \int_{-1}^5 |x-2| + |x-4| dt$$

$$I_{15} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dt \quad I_{16} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dt$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1 : Calculez les intégrales suivantes .

$$I_1 = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \quad I_2 = \int_1^0 (x + e^x) dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \quad I_4 = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) dx$$

$$I_5 = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} dx \quad I_6 = \int_1^2 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx$$

$$I_7 = \int_{-1}^1 x |x| dx \quad I_8 = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 + 2x - 5 dx$$

$$I_9 = \int_0^1 t(t^2 + 1)^3 dt \quad I_{10} = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad I_{12} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$I_{13} = \int_0^3 |2t-1| dt \quad I_{14} = \int_{-1}^5 |x-2| + |x-4| dt$$

$$I_{15} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dt \quad I_{16} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dt$$

Exercice 14 : En utilisant une intégration par partie calculer :

$$1) I = \int_0^1 x e^{2x} dx \quad 2) J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$3) K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx \quad 4) L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$5) M = \int_1^e (x \ln x) dx \quad 6) N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

$$N = \left[x \cos(\ln(x)) \right]_1^e + \underbrace{\int_1^e \sin(\ln(x)) dx}_{J \text{ (en fonction de } N)}$$

$$J = \int_1^e \sin(\ln(x)) dx$$

$$\text{on pose } U = \sin(\ln(x)) \longrightarrow V' = \frac{1}{x} \cos(\ln(x))$$

$$U' = 1$$

$$\longleftrightarrow V = x$$

$$J = \left[x \sin(\ln(x)) \right]_1^e - \underbrace{\int_1^e \cos(\ln(x)) dx}_N$$

$$\begin{aligned} N &= \left[U \cdot V \right]_1^e - \int_1^e V' U dx \\ &= \left[x \cdot \cos(\ln(x)) \right]_1^e + \int_1^e x \left(\frac{1}{x} \cdot \sin(\ln(x)) \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \left[x \cos(\ln(x)) \right]_1^e + \left[x \sin(\ln(x)) \right]_1^e - N \\ 2N &= \left[x \cos(\ln(x)) \right]_1^e + \left[x \sin(\ln(x)) \right]_1^e \end{aligned}$$

Exercice 14 : En utilisant une intégration par partie calculer :

$$1) I = \int_0^1 x e^{2x} dx \quad 2) J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$3) K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx \quad 4) L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$5) M = \int_1^e (x \ln x) dx \quad 6) N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

E xerau

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos(x) dx \quad , \quad J = \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \sin(2x) dx$$

I. P. P. 2 fois

Exercice 14 : En utilisant une intégration par partie calculer :

$$1) I = \int_0^1 x e^{2x} dx \quad 2) J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$3) K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx \quad 4) L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$5) M = \int_1^e (x \ln x) dx \quad 6) N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

EXERCICE 5 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}$.

1) Etudier les variations de f .

2) En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right) : 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3) a) Vérifier que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right) : 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

b) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)}$$

c) Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$.

d) Montrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

calculer $\int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \int \frac{1}{(x-1)(x+3)}$

$x = 1$ et $x = -3$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[\ln|x-1| - \ln|x+3| \right]$$

$$= \int \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} \right) dx$$

$$\frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{x+3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)}$$

$$\frac{a(x+3) + b(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(a+b)x + 3a - b}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+3)}$$

$$(a+b)x + 3a - b = 1 = 0 \cdot x + 1$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ 4a=1 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

1°) $\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right)$

$$ax + b = a'x + b'$$

2°) Calculer $\int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$

EXERCICE 5 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}$.

1) Etudier les variations de f .

2) En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right) : 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3) a) Vérifier que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right) : 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

b) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)}$$

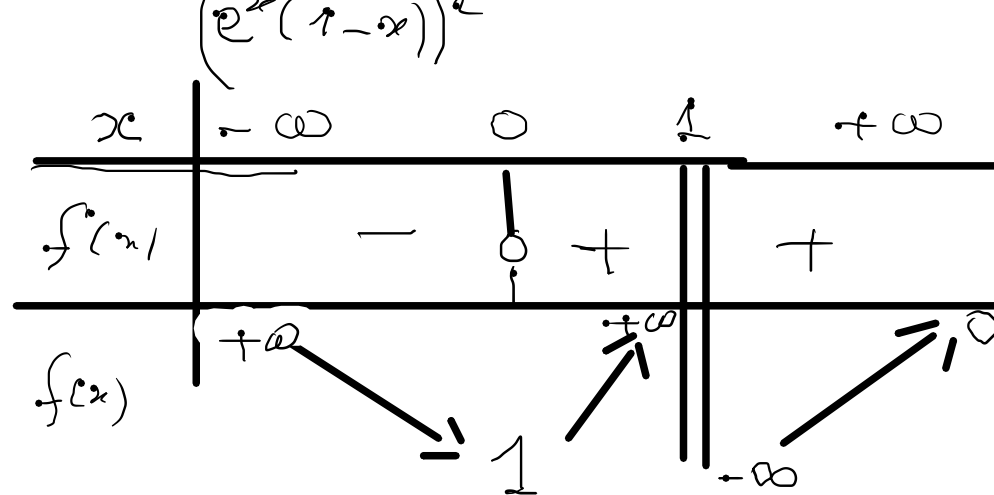
c) Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$.

d) Montrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

$$= - \frac{e^x(1-x) - e^x}{(e^x(1-x))^2} = \frac{x e^x}{(e^x(1-x))^2}$$

vident

$$= \frac{x}{(e^x(1-x))^2}$$



$$2^o / \forall x \in \left[0, \frac{1}{2} \right], \quad 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$1^o / D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{e^x(1-x)} \right)' = - \frac{(e^x(1-x))'}{(e^x(1-x))^2} = - \frac{e^x(1-x) + (1-x)'e^x}{e^x(1-x)^2}$$

Soit $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et comme f est

$$\text{Alors } f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \\ 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - x e^x} \\ &= \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

EXERCICE 5 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{e^x(1-x)}$.

1) Etudier les variations de f .

2) En déduire que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right) : 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

3) a) Vérifier que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right) : 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

b) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)}$$

c) Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$.

d) Montrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

x.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x(1-x)} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^x} \left(1 + x + \frac{x^2}{1-x} \right) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cdot f(x) dx. \end{aligned}$$

ALPÉ

c) Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{(1+x)}_P \underbrace{e^{-x}}_E dx$ $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

←

On pose $U' = e^{-x} \Leftrightarrow U = -e^{-x}$
 $V = 1+x \quad V' = 1$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx &= \left[-(1+x)e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= -\frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} + 1 - \left[e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{e}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} + 1 \end{aligned}$$

EXERCICE 9 :

a- Vérifier que pour tout réel x on a :

$$\frac{1}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

b- En déduire la valeur de $J = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)^2}$.

c- A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale suivant $K = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x + 1)^3} dx$

① Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{(e^x + 1)^2 - e^x(e^x + 1) - e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{1}{(e^x + 1)^2}$$

$$b/ J = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \right) dx$$

$$= \left[x - \ln(e^x + 1) + \frac{1}{e^x + 1} \right]_0^1$$

$$= 1 - \ln(e + 1) + \frac{1}{e + 1} + \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$J = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{2}{e + 1}\right) + \frac{1}{e + 1}$$

$$\frac{u'}{v'}$$

$$\begin{array}{l} u' = x \rightarrow u = \frac{x^2}{2} \\ v = \frac{x^2}{(e^x + 1)^2} \end{array}$$

$$c) K = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x + 1)^3} dx$$

$$u' = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} = e^x (e^x + 1)^{-3}$$

$$v = x \iff v' = 1$$

$$\iff u = \frac{(e^x + 1)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(e^x + 1)^2}$$

EXERCICE9 :

a- Vérifier que pour tout réel x on a :

$$\frac{1}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

b- En déduire la valeur de $J = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x + 1)^2}$.

c- A l'aide d'une intégration par parties, calculer

l'intégrale suivant $K = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x + 1)^3} dx$

$$U' = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} \longrightarrow U = -\frac{1}{2} \frac{1}{(e^x + 1)^2}$$

$$V = x \longrightarrow V' = 1$$

$$c) \quad K = \left[-\frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(e+1)^2} - 0 + \frac{1}{2} J$$

$$K = -\frac{1}{2} \frac{1}{(e+1)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{2}{e+1}\right) + \frac{1}{e+1} \right)$$

Exercice 16: On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3} dx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une **I.P.P**

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad I_0 &= \int_0^1 \sqrt{x+3} dx \\ &= \int_0^1 (x+3)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^1 (x+3)' (x+3)^{-\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x+3)^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \left[\sqrt{x+3}^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} (8 - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &< I_0 \\ \boxed{I_{n+1} &< I_n} \end{aligned}$$

$$b) \quad I_1 = \int_0^1 x \cdot \sqrt{x+3} dx$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } V &= x & \longleftrightarrow V' &= 1 \\ U' &= \sqrt{x+3} & \longleftrightarrow U &= \frac{2}{3} \sqrt{x+3}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x+3}^3 \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 (x+3)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x+3}^3 \right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{5} (x+3)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\sqrt{3}^3 = \sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{3} =$$

$$\sqrt{x+3}^3 = \left(\frac{16}{3} - 0 \right)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{4}{15} \left[\sqrt{x+3}^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{16}{3} - \frac{4}{15} (2^5 - \sqrt{3}^5) \end{aligned}$$

Exercice 38: Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$

par $(\forall t \in]0, +\infty[) (f(t) = e^{\frac{1}{\ln t}})$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

2) Considérons la fonction définie sur $]1, +\infty[$

par : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$

a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[)$:

$(f(x+1) \leq F(x) \leq f(x))$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

3) a) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[) (e^t \geq t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x > 1) : \ln$

$F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$

4) a) Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[) (\ln t \leq t-1)$

b) En déduire que $(\forall x > 1) (F(x) - 1 \geq \ln \left(\frac{x}{x-1} \right))$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$

Exercice 16: On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3} dx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} \sqrt{x+3} dx - \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$$

$$= \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} (x-1) dx$$

→ Géomé
Proba.

On a $0 \leq x \leq 1$

donc $x-1 \leq 0$

$$\Rightarrow x^n \cdot \sqrt{x+3} (x-1) \leq 0$$

Alors $\int_0^1 x^n \sqrt{x+3} (x-1) dx \leq 0$

donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$

(I_n) est décroissante

3) a)

on a $0 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 3 \leq x+3 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{x+3} \leq 2$$

$$\sqrt{3} x^n \leq x^n \sqrt{x+3} \leq 2 x^n$$

$$\sqrt{3} \int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq 2 \int_0^1 x^n dx$$

$$\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$$