Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2018 – Ss2

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$

2) a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.
   b) Montrer que $\dim E=2$

3) a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
   b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

4) On définit sur $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne "T" par :
   $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)(\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2)$; $M(x,y)TM(x',y')=M(x,y)TM(x',y')-M(y,0)TM(y',0)$
   Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ définie par :
   $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})$; $\varphi(x+iy)=M(x,y)$
   a) Montrer que E est une partie stable de (E,T)
   b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
   c) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

5) a) Montrer que la loi "T" est distributive par rapport à la loi "$+$" dans E .
   b) $(E,+,T)$ est un corps commutatif.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2018 – Ss1

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$

2) a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.
   b) On pose $J=M(0,1)$. Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel réel $(E,+,\cdot)$

3) a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
   b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

4) Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ définie par :

   $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})$; $\varphi(x+iy)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$

   a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
   b) On pose $E^*=E-\{0\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$
   c) En déduire que $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

5) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Bon Courage

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2017 – Ss2

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix}$ et pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-3y\\y&x\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ de dimension 2.

2) a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\quad \varphi(x+iy)=M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$

b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

c) Montrer que $J^{2017}=\varphi(3^{1008}\sqrt{3})$ puis déterminer l'inverse de J^{2017} dans $(E^*,\times)$.

4) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice .4 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2017 – Ss1

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$ et pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

On considère l'ensemble $E=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$.

2) On définit sur $M_3(\mathbb{R})$ la loi de composition interne "T" par :

$$\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(c,d)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\quad M(a,b)TM(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$$

Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),T)$

3) On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\quad \varphi(x+iy)=M(x,y)\ \text{ et On pose } E^*=E-\{M(0,0)\}$$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers (E,T) et que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$.

b) En déduire que (E^*,T) est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J.

4) a) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi "$+$" dans E.

b) En déduire que $(E,+,T)$ est un corps commutatif.

Bon Courage