Systèmes oscillants

Pendule élastique :

Loi de Hook / Constante de raideur :

$\boxed{F = k \times x}$ k : constante de raideur $x = l - l_0$ = allongement

N $N.m^{-1}$ m

Période d'un pendule élastique :

T ne dépend pas de l'amplitude

T^2= f(M) est linéaire, de coefficient α et $\boxed{\alpha \times k = 4\pi^2}$ $\boxed{\text{et } \alpha = \frac{T^2}{M}}$

d'où $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}}$ kg $N.m^{-1}$

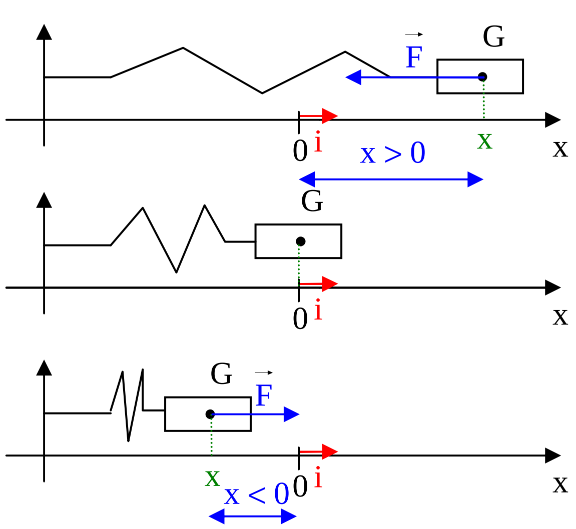
s

Pendule pesant simple :

Période : - Ne dépend pas de l'amplitude, ni de la masse suspendue.
- T dépend de la longueur du fil et de l'accélération du champs de pesanteur.

$\boxed{T \approx 2\sqrt{l}}$ en vrai : $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

Etude dynamique d'un pendule élastique horizontal : (Pas de frottements)



$\vec{P} + \vec{R} = 0$

$\boxed{\vec{F} = -k \times x \times \vec{i}}$

2ème loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = M \times \vec{a}$

d'où $\vec{F} = M \times \vec{a}$

$\|\vec{a}\| = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ donc $\boxed{\vec{a} = \ddot{x} \times \vec{i}}$

d'où $-k \times x \times \vec{i} = M \times \ddot{x} \times \vec{i}$

$\Leftrightarrow -k \times x = M \times \ddot{x}$

$\Leftrightarrow M \times x + k \times x = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{M} \times x = 0}$

↳ équadiff du 2nd degré.

Solutions de la forme : $x = X_m \times \sin(\omega_0 \times t + \varphi)$

$\dot{x} = X_m \times \omega_0 \times \cos(\omega_0 \times t + \varphi)$

$\ddot{x} = X_m \times \omega_0^{\ 2} \times \sin(\omega_0 \times t + \varphi) = -\omega_0^{\ 2} \times x$

donc $\ddot{x} + \omega_0^{\ 2} \times x = 0$ donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ Donc $x = X_m \times \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} \times t + \varphi\right)$

Donc $\boxed{x = X_m \times \sin\left(\underbrace{\sqrt{\frac{k}{M}}t + \varphi}\right)}$ → Phase à l'origine des dates

Phase du mouvement en radian (rd)

N.B. : $x = X_m \times \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \varphi'\right)$ est aussi une solution.

→ C'est une fonction périodique qui reprend la même valeur quand la phase augmente de 2π ; d'où :

$\sqrt{\frac{k}{M}}t + \varphi + 2\pi = \sqrt{\frac{k}{M}}(t + T) + \varphi$ d'où $2\pi = T\sqrt{\frac{k}{M}}$ donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$

⇒ Le pendule oscille entre 2 positions $+X_m$ et $-X_m$ et est constamment soumis à une force orientée vers la position d'équilibre. On parle d'oscillateur harmonique. C'est un modèle pour les systèmes vibratoires.

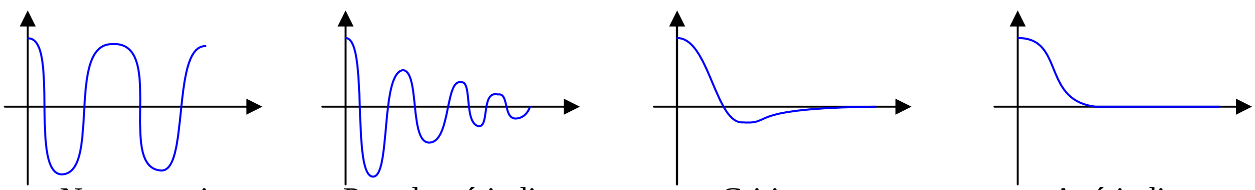
Etude analytique du mouvement : Le choix de la fonction sin ou cos n'a pas d'importance, sauf pour la phase à l'origine. Si sin → $\varphi = \frac{\pi}{2}$; Si cos → $\varphi = 0$; Etudions $x(t) = X_m \times \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$ N.B. : $\sqrt{\frac{k}{M}}T = 2\pi$

t	0		$\frac{T}{4}$		$\frac{T}{2}$		$\frac{3T}{4}$		T	
$\sqrt{\frac{k}{M}}t$	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	
$\ddot{x}$	$-\frac{k}{M}X_m$	↗	O	↗	$\frac{k}{M}X_m$	↘	O	↘	$-\frac{k}{M}X_m$	(accélération)
$\dot{x}$	O	- ↘	$-X_m\sqrt{\frac{k}{M}}$	↗ -	O	+ ↗	$X_m\sqrt{\frac{k}{M}}$	↘ +	O	(vitesse)
x	X_m	↘	O	↘	$-X_m$	↗	O	↗	X_m	(position)

$x = X_m \times \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$; $\dot{x} = -X_m\sqrt{\frac{k}{M}} \times \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$; $\ddot{x} = -\frac{k}{M}x$

Amplitude Max → vitesse nulle → $E_c = 0$ et $E_p =$ Max
Position d'équilibre → vitesse Max → $E_c =$ Max et $E_p = 0$
Si E_c ↗ , E_p ↘

Régimes :



Non-amorti Pseudo-périodique Critique Apériodique

Frottements →

Energies : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} \times \overset{k}{\boxed{m\frac{4\pi^2}{T_0^2}}} \times X_m{}^2 \times \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ donc $\boxed{E_c = \frac{1}{2} \times k \times X_m{}^2 \times \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}$

$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \boxed{\frac{1}{2} \times k \times X_m{}^2 \times \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = E_p}$

car : $x = X_m \times \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$; $\dot{x} = -\frac{2\pi}{T_0}X_m \times \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$; $\ddot{x} = -\frac{4\pi^2}{T_0{}^2}X_m \times \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0{}^2}x$ et $\frac{k}{M} = \frac{4\pi^2}{T_0{}^2}$

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \times k \times X_m{}^2 \times \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + \frac{1}{2} \times k \times X_m{}^2 \times \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$E_m = \frac{1}{2} \times k \times X_m{}^2 \times \left[\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right]$ d'où $\boxed{E_m = \frac{1}{2} \times k \times X_m{}^2}$

Oscillateurs forcés, résonnance :

moteur = excitateur ; ressort = résonateur, subit des oscillations forcées de période T.
si $T = T_0$ → amplitude max → phénomène de résonnance.
$f_r \approx f_0$