

# le signe d'une fonction Astuce

le signe d'une fonction

→ L'encadrement - inéquation

$$g(x) = \ln(x) + 1 \quad (x > 0)$$

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{-1}$$

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^{-1}$$

|        |           |     |           |
|--------|-----------|-----|-----------|
|        | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | 0   | +         |

→ Appartenance du tableau de variations

①

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
|        | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ |           | 0        |           |

$g(\alpha) = 0$  c.à.d.  $\alpha$  sol de l'équation  $g(x) = 0$

Si  $x \leq \alpha$  on a  $g$  est str croissante

Alors  $g(x) \leq g(\alpha)$  et on a  $g(\alpha) = 0$

d'où  $g(x) \leq 0$

Si  $x > \alpha$  on a  $g$  est str  $\nearrow$   
Alors  $g(x) \geq g(\alpha)$

$g(x) \geq 0$

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
|        | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

②

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ |           | 0        |           |

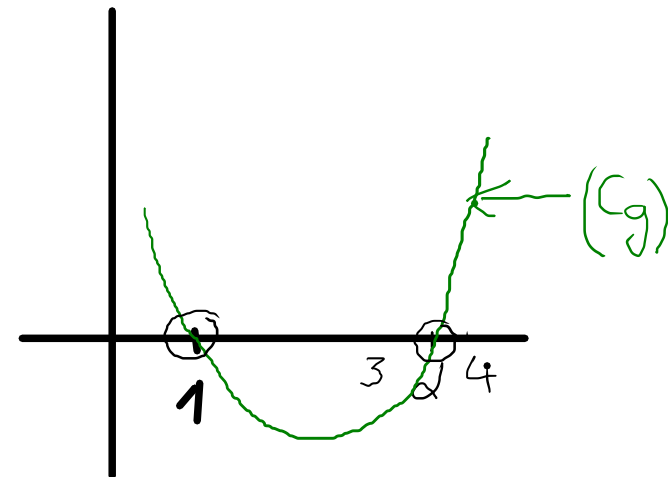
On a  $g$  admet une valeur Maximal en  $\alpha$

Donc  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) \leq g(\alpha)$   
et on  $g(\alpha) = 0$

donc  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \underline{g(x) \leq 0}$

→ Appartenance de la courbe

①  $g(x) = f(x) - x$



Comparer  $f(x)$  avec  $x$

$$f(x) - x$$

Le signe de  $g(x)$

→ sur  $]0, 1]$  et  $[\alpha, +\infty[$   
on a  $(C_g)$  au dessus de  
(0x) donc

$$g(x) \geq 0$$

→ sur  $[1, \alpha]$  on a  
 $(C_g)$  est au dessous  
de (0x) donc  
 $g(x) \leq 0$

$$\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 \in [1, \alpha] \end{cases}$$

- 1) Mq  $\forall n \in \mathbb{N} \ 1 \leq U_n \leq \alpha$  {Récurrence}
- 2) Étudier la monotonie de  $(U_n)$  —
- 3) Calculer Limite

On a  $U_{n+1} = f(U_n)$

et  $\forall x \in [1, \alpha]$  on a  $g(x) \leq 0$

d'où  $g(U_n) \leq 0$   
 $\Leftrightarrow \underbrace{f(U_n) - U_n}_{U_{n+1} - U_n} \leq 0$

d'où  $(U_n) \downarrow$

on a  $(U_n)$  est décroissante et minorée par 1  
 donc  $(U_n)$  est convergente

3)  $\lim U_n$

on a

$$\begin{cases} \bullet f \text{ continue sur } [1, \alpha] \\ \bullet f[1, \alpha] \subset [1, \alpha] \\ \bullet (U_n) \text{ convergente} \\ \bullet U_0 \in [1, \alpha] \end{cases} \Rightarrow$$

la limite de  $(U_n)$  est la sol de l'eq  $f(x) = x$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \alpha \quad (\text{appartenir de } C_g \text{ l'intersection de } (C_g))$$

et on a  $1 \leq U_n \leq \alpha$

avec  $(0, x)$

donc  $1 \leq \lim U_n \leq \alpha$

et comme  $(U_n)$  décroissante alors

$\lim U_n = 1$  (car  $(U_n)$  minorée par 1)



Exercice N°4 (7 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$ .

( $C$ ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1.
  - a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - b. Montrer que la droite  $(\Delta) : y = \frac{1}{3}x$  est une asymptote de ( $C$ ) au voisinage de  $+\infty$ .
  - c. Étudier la position relative de ( $C$ ) et  $(\Delta)$ .
2.
  - a. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ;  $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$ .
  - b. En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
  - c. Montrer que la droite  $(\Delta') : y = -\frac{2}{3}x$  est une asymptote à ( $C$ ) au voisinage de  $-\infty$ .
3.
  - a. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$ .
  - b. Étudier les variations de  $f$ .
4.
  - a. Écrire une équation de la tangente ( $T$ ) à ( $C$ ) au point d'abscisse 0.
  - b. Vérifier que le point  $A(\ln 2, \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2)$  est un point de ( $C$ ).
  - c. Dans l'annexe figure 1, on a placé  $A$  et on a tracé  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ . Tracer ( $C$ ) et ( $T$ ).
5. Soient  $M$  et  $N$  deux points de ( $C$ ) d'abscisses non nulles et opposées.  
Montrer que  $(MN)$  et  $(T)$  sont parallèles.
6. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On appelle  $D_n$  l'aire du domaine du plan délimité par la courbe ( $C$ ), l'axe  $(\Delta)$  et les deux droites d'équations  $x = 0$  et  $x = n$ .
  - a. Justifier que pour tout entier  $n$  non nul  $D_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$ .
  - b. Soit  $a$  un réel strictement positif.  
Démontrer que pour tout  $t \in [1, 1+a]$  on a  $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ .  
En déduire que pour tout réel  $a$  strictement positif  $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$ .
  - c. Montrer que tout entier  $n$  non nul  $D_n \leq 1$ .
  - d. Montrer que la suite  $(D_n)$  est croissante.
  - e. Déduire que la suite  $(D_n)$  converge vers une limite  $l$  et que  $\ln 2 \leq l \leq 1$ .

## Sujet de révision

### Exercice N° 1 (3 points)

On pose  $J_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

1 à l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $J_1 = \frac{1}{9}(1+2e^3)$

2 a) Montrer que  $J_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . ✓

b) Montrer que  $(J_n)$  est décroissante. ✓

c) En déduire que la suite  $(J_n)$  est convergente

3 a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que  $3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$

b) En déduire les valeurs de  $J_2$  et  $J_3$

### Exercice N° 2 (5 points)

9) a) on a:  $1 \leq x \leq e$

$$0 \leq \ln(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (\ln(x))^n \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq x^2 \leq e^2$$

$$\text{d'où } 0 \leq x^2 (\ln(x))^n \leq e^2$$

$$\text{d'où } 0 \leq \int_1^e x^2 (\ln(x))^n dx \leq e^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J_n \geq 0}}$$

$$b) J_{n+1} - J_n = \int_1^e x^2 (\ln(x))^{n+1} dx - \int_1^e x^2 (\ln(x))^n dx$$

$$= \int_1^e x^2 (\ln(x))^n (\ln(x) - 1) dx$$

on a  $\forall x \in [1, e]$   
 $x^2 (\ln(x))^n \geq 0$  et  $\ln(x) - 1 \leq 0$

$$\text{d'où } J_{n+1} - J_n \leq 0$$

la linéarité  
de l'intégral

|                        |                   |                  |                  |
|------------------------|-------------------|------------------|------------------|
| Matière: Mathématiques | Niveau : 4 Sc.Exp | Date: 29/03/2023 | Durée : 3 heures |
| Sujet de révision      |                   |                  |                  |

### Exercice N° 1 (3 points)

On pose  $J_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

1 à l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $J_1 = \frac{1}{9} (1 + 2e^3)$

2 a) Montrer que  $J_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Montrer que  $(J_n)$  est décroissante.

c) En déduire que la suite  $(J_n)$  est convergente

3 a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que  $3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$

b) En déduire les valeurs de  $J_2$  et  $J_1$

### Exercice N° 2 (5 points)

d'au  $(J_n)$  est décroissante  $\int (\frac{x}{n} - 1) \ln(x)$

© En déduire :

ona  $(J_n)$  est décroissante et minorée

par 0  
Alors  $(J_n)$  est convergent

$$(U^n)' = n \cdot U' \cdot U^{n-1}$$

3) a)

$$3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$$

$\downarrow \downarrow$   
ALPES

soit  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a } J_{n+1} = \int_1^e x^2 (\ln(x))^{n+1} dx$$

$$\text{On pose } v(x) = (\ln(x))^{n+1} \iff v'(x) = (n+1) \frac{1}{x} (\ln(x))^n$$

$$\text{d'apr } I. P. P \quad u'(x) = x^2 \iff u(x) = \frac{x^3}{3}$$

## Sujet de révision

### Exercice N° 1 (3 points)

On pose  $J_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

1 à l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $J_1 = \frac{1}{9}(1+2e^3)$

2 a) Montrer que  $J_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Montrer que  $(J_n)$  est décroissante.

c) En déduire que la suite  $(J_n)$  est convergente

3 a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que  $3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$

b) En déduire les valeurs de  $J_2$  et  $J_1$

### Exercice N° 2 (5 points)

$$J_{n+1} = \left[ \frac{x^3}{3} (\ln(x))^{n+1} \right]_1^e - \frac{n+1}{3} \underbrace{\int_1^e x^2 (\ln(x))^n dx}_{J_n}$$

$$J_{n+1} = \left( \frac{e^3}{3} - 0 \right) - \frac{n+1}{3} J_n \quad \text{car } \ln(e) = 1 \text{ et } \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow 3J_{n+1} = e^3 - (n+1)J_n$$

$$\Leftrightarrow 3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$$

b) En déduire  $J_2$

pour  $n=1$  on a

$$3J_2 + 2J_1 = e^3$$

$$\text{donc } 3J_2 = e^3 - 2J_1 = e^3 - \frac{2}{9}(1+2e^3)$$

Calculons  $J_3$

pour  $n=2$

$$3J_3 + 3J_2 = e^3$$

d'où  $J_3 = \dots$

## Sujet de révision

## Exercice N° 1 (3 points)

On pose  $J_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

- 1) à l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $J_1 = \frac{1}{9} (1 + 2e^3)$
- 2) a) Montrer que  $J_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
 b) Montrer que  $(J_n)$  est décroissante.  
 c) En déduire que la suite  $(J_n)$  est convergente.
- 3) a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que  $3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$   
 b) En déduire les valeurs de  $J_2$  et  $J_3$

## Exercice N° 2 (5 points)

Rep

$$J_n = \int_1^e x^2 (\ln(x))^n dx \quad \left( \int \right) \left( J_n \right)$$

1)  $J_1 = \int_1^e x^2 (\ln(x)) dx$

On pose  $V(x) = \ln(x) \Leftrightarrow V'(x) = \frac{1}{x}$   
 $U'(x) = x^2 \Leftrightarrow U(x) = \frac{x^3}{3}$   
 d'après I.P.P.

Rappel  
 intégration par  
 parties  
 $\rightarrow \int u' v dx = [uv] - \int v' u dx$   
 $u$  et  $v$  on le choisit suivant  
 technique d'ALPES

$\rightarrow \textcircled{x^n} \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$   
 $\rightarrow \text{Monotonie}$   
 $U_{n+1} - U_n$

$$J_1 = \left[ \frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{e^3}{3} \ln(e) - 0 - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{9} (1 + 2e^3)$$

2) a) Ma ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ )  $J_n \geq 0$

# Exercice N°1 (7 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x$   
 $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Montrer que la droite  $(\Delta): y = \frac{1}{3}x$  est une asymptote de  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- Étudier la position relative de  $(C)$  et  $(\Delta)$ .
- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x^2+1) - \frac{2}{3}x$ .
- En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- Montrer que la droite  $(\Delta'): y = -\frac{2}{3}x$  est une asymptote à  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .
- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(x) = \frac{x^2-1}{3(x^2+1)}$ .
- Étudier les variations de  $f$ .
- Écrire une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1.
- Vérifier que le point  $A(\ln 2, \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2)$  est un point de  $(C)$ .
- Dans l'autre figure 1, on a placé  $A$  et on a tracé  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ . Tracer  $(C)$  et  $(T)$ .

$$y = a^{x+b}$$

$$y = a$$

$$y = a^{x+b}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k)$$

$$= \ln(n+1)$$

telescoping (balayage)

$$1) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x = +\infty \text{ et } \ln(1) = 0 \end{cases}$

$$S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

$$b) (\Delta) y = \frac{1}{3}x \text{ asymptote à } (C_f) \text{ au } v(+\infty)$$

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln(1) = 0$$

Car

$$\text{donc } (\Delta) y = \frac{1}{3}x \text{ asymptote oblique à } (C_f) \text{ au } v(+\infty)$$

$$(\Delta) y = ax$$

branche parabolique

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \infty$$

### Exercice N°4 (7 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$ .

$(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1 a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Montrer que la droite  $(\Delta): y = \frac{1}{3}x$  est une asymptote de  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .

c) Étudier la position relative de  $(C)$  et  $(\Delta)$ .

2 a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3}x$ .

b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

c) Montrer que la droite  $(\Delta'): y = -\frac{2}{3}x$  est une asymptote à  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .

3 a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{3(x^2 + 1)}$ .

b) Étudier les variations de  $f$ .

4 a) Écrire une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0.

b) Vérifier que le point  $A(1, \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2)$  est un point de  $(C)$ .

c) Dans l'annexe figure 1 on a placé  $A$  et on a tracé  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ . Tracer  $(C)$  et  $(T)$ .

© position de  $(C)$  et  $(\Delta)$

$$f(x) - y = \ln(1 + e^{-x})$$



$$\text{on a } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^{-x} > 0$$

$$\Rightarrow 1 + e^{-x} > 1$$

$$\ln(1 + e^{-x}) > 0$$

$$\text{d'où } f(x) - y > 0$$

d'où  $(C)$  au dessus de  $(\Delta)$

$$2) a) M_q (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x.$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x \quad \left| \quad f(1) = \ln(1 + e^{-1}) - \frac{2}{3} \right.$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x$$

$$= \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x$$

$$= \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) + \frac{1}{3}x = \ln(e^x + 1) - x + \frac{1}{3}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} x > 1 &\Rightarrow \ln x > 0 \\ 0 < x < 1 &\Rightarrow \ln x < 0 \end{aligned}}$$

# Exercice N°4 (7 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$ .

$(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1 a Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b Montrer que la droite  $(\Delta) : y = \frac{1}{3}x$  est une asymptote de  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .

c Étudier la position relative de  $(C)$  et  $(\Delta)$ .

2 a Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3}x$ .

b En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

c Montrer que la droite  $(\Delta') : y = -\frac{2}{3}x$  est une asymptote à  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .

3 a Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(x) = \frac{x^2 - 2}{3(x^2 + 1)}$ .

b Étudier les variations de  $f$ .

4 a Écrire une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0.

b Vérifier que le point  $A(\ln 2, \ln 2 - \frac{2}{3} \ln 2)$  est un point de  $(C)$ .

c Dans l'autre figure 1, on a placé  $A$  et on a tracé  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ . Tracer  $(C)$  et  $(T)$ .

b) On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = 0$

et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3} = +\infty$

donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c)  $(\Delta) : y = -\frac{2}{3}x$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \frac{2}{3}x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x$

$= 0$  car ...

$(\Delta) : y = -\frac{2}{3}x$  asymptote oblique à  $(C)$  en  $-\infty$

# Exercice N°4 (7 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(1+e^x) + \frac{1}{3}x$

$(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1 a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

b) Montrer que la droite  $(\Delta): y = \frac{1}{3}x$  est une asymptote de  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .

c) Étudier la position relative de  $(C)$  et  $(\Delta)$ .

2 a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(e^x + 1) + \frac{1}{3}x$ .

b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

c) Montrer que la droite  $(\Delta'): y = -\frac{2}{3}x$  est une asymptote à  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .

3 a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{3}$ .

b) Étudier les variations de  $f$ .

4 a) Écrire une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0.

b) Vérifier que le point  $A(\ln 2, \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 2)$  est un point de  $(C)$ .

c) Dans l'autre figure 1, on a placé  $A$  et on a tracé  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ . Tracer  $(C)$  et  $(T)$ .

On a la fonction  $x \mapsto 1+e^x$   
 → est dérivable et str positive sur  $\mathbb{R}$

Alors  $x \mapsto \ln(1+e^x)$   
 est dérivable sur  $\mathbb{R}$

→ et la fonction  $x \mapsto \frac{1}{3}x$   
 est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f$  est dérivable  
 sur  $\mathbb{R}$  (somme de 2

fonction dérivables.  
 sur  $\mathbb{R}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) = f'(x) = (\ln(e^x + 1))' + (\frac{1}{3}x)'$$

$$= \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$$

$\ln(u)$

le signe de  $f'(x)$  est  
 le signe de  $e^x - 2$

$$\rightarrow e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq \ln 2$$

$$e^x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \ln 2$$

|         |           |         |           |
|---------|-----------|---------|-----------|
|         | $-\infty$ | $\ln 2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$     | $+$       |
| $f(x)$  |           |         |           |

$f^{-1}$  est dérivable en 0  
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$

$f$