Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

et soit $f$ la fonction numérique définie sur $I = [1; +\infty[$

par : $$f(x) = \frac{5x - 1}{x + 3}$$

**1)** Montrer que $f$ est strictement croissante sur $I$

et en déduire que : $f([1; +\infty[) \subset [1; +\infty[$

**2)** Montrer que : $(\forall x \in I) \ f(x) - x = -\frac{(x-1)^2}{x+3}$

puis en déduire que : $(\forall x \in I) \ f(x) \leq x$

**3)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n > 1$

**4)** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante puis en

6) Soit $(v_n)$ la suite définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique de

raison $r = \frac{1}{4}$.

b) Exprimer $v_n$ et $u_n$ en fonction de $n$.

| 7pts | EXERCICE 03 |
|---|---|
| | On considère le cercle $(C)$ d'équation : $x^2+y^2-2x-4y-3=0$ |
| 1.25pts | 1)Montrer que $(C)$ est un cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2\sqrt{2}$ . |
| 0.5pts | 2)a-Vérifier que $A(-1;0)\in(C)$. |
| 1pts | b-Donner une équation cartésienne de la droite tangente $(D)$ au cercle $(C)$ au point $A$. |
| 0.75pts | 3)a-Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $x+y-3=0$ coupe le cercle $(C)$ en deux points $E$ et $F$ . |
| 1pts | b-Déterminer les cordonnées des points $E$ et $F$ . |
| 1.25pts | c-Donner les équations des droites tangentes au cercle $(C)$ en $E$ et $F$ . |
| 0.5pts | 4)a-Vérifier que le point $B(1;-2)$ est à l'extérieur du cercle $(C)$. |
| 0.75pts | b-Déterminer les équations des tangentes au cercle $(C)$ qui passe au point $B$ . |

**Exercice10 :** déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $r=3$

**Exercice11 :**Déterminer L'ensemble $(E)$ dans les cas suivants :

**1)** $(E)$: $x^2+y^2-x+3y-4=0$

**2)**$(E)$: $x^2+y^2-6x+2y+10=0$

**3)** $(E)$: $x^2+y^2-4x+5=0$

**Exercice9:** dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}\left(O;i;j\right)$ Considérons les points $A(1;-1)$ et $B(4;-1)$ et $C(-2;2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2)en déduire une mesure de l'angle $\left(A\dot{B};A\dot{C}\right)$

3)Calculer la surface du triangle ABC

4)déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5)déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $\left(A\dot{B};A\dot{C}\right)$

**Exercice1 :** dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points

$A(1;-3)$ et $B(3;7)$ et $C(-3;1)$

1)Montrer que le triangle ABC est rectangle en C

2)Calculer la surface du triangle ABC

**Exercice2:** dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points

$A(5;0)$ et $B(2;1)$ et $C(6;3)$

1) Calculer $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2)en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

**Exercice4 :** Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et le trinôme $f(x) = (x\vec{u} + \vec{v})^2$

1- Développer $f(x)$.
2- Déterminer le signe de $f(x)$.
3- Déterminer le discriminant de $f(x)$ .
4- en déduire que pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :
$\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ 5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

**Exercice5 :** On sait que pour trois points donnés dans le plan on a : $MA + MB \geq AB$ le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

1- Développer $(\vec{u} + \vec{v})^2$
2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que
$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

**Exercice9:** Soient le cercle

$(\mathcal{C})$: $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ et $A(5,6)$

1- Vérifier que le point $A$ est à l'extérieur de $(\mathcal{C})$

2- a) Déterminer l'équation de la droite $(\delta)$ passante par $A$ et parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Vérifier que $(\delta)$ n'est pas tangente à $(\mathcal{C})$.

3- Soit $(\Delta)$ une droite qui passe par $A$ et qui n'est pas parallèle à l'axe $(Oy)$ et dont l'équation réduite est : $(\Delta)$ $y=mx+p$ a) Déterminer l'équation de $(\Delta)$ en fonction de $m$ uniquement.

b) Déterminer $m$ pour que $(\Delta)$ soit tangente au Cercle $(\mathcal{C})$.

4- Soit $B(4,5)$

a) Montrer que la droite passante par $B$ et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit $(\Delta')$ une droite qui passe par $A$ et qui n'est pas parallèle à l'axe $(Oy)$ et dont l'équation réduite est : $(\Delta')$ $y=mx+p$ ; Déterminer $m$ pour que $(\Delta)$ soit tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

**Exercice 1 ( R 2004) :**
On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1 a Montrer que : $u_n > 0$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

b Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

c En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

2 a Montrer que : $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

b En déduire que : $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{cases}$ ; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}; 2 < u_n < 4$

2. (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante ,puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}; 3 < u_n < 4$

   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;0 < 4 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$
   , puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$

   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$

   (b) En déduire que $v_n$ , puis $u_n$ en fonction de $n$.

   (c) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ........ + v_n$ ,
   et $T_n = \dfrac{2}{u_0 - 2} + \dfrac{2}{u_1 - 2} + \dfrac{2}{u_2 - 2} + ........ + \dfrac{2}{u_n - 2}$

   (a) Calculer $S_n$ et $T_n$ en fonction de $n$ .

   (b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T_n}{n}$