

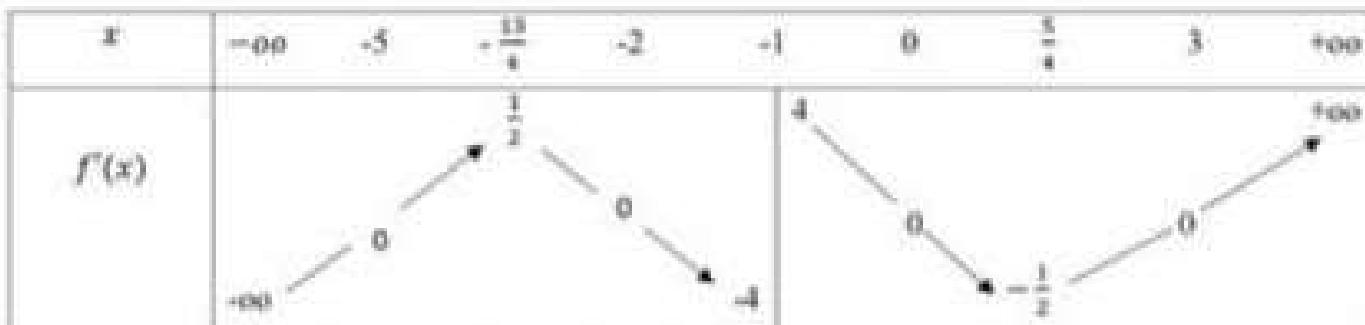
Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = |x + 1|(\sqrt{|x + 1|} - 2)^2$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de (C_f) .
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat géométriquement.
- 3) Déterminer l'intersection de la courbe (C_f) avec les axes de repère sur $[-1; +\infty[$.
- 4) Etudier la dérivableté de f à droite en -1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 5) Montrer que $(\forall x \in]-1; +\infty[) : f'(x) = \frac{2x(x-3)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2)}$
- 6) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- 7) Déterminer les extréums locaux de f sur D_f .
- 8) En exploitant le tableau de variation de la fonction f' .



a) Déterminer le signe de f'' sur D_f .

b) Dresser le tableau de concavité de (C_f) sur D_f .

c) Déterminer les points d'inflexions de (C_f) .

9) Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ sur $[-1; +\infty[$.

10) Soit g la restriction de la fonction f sur $[0; 3]$.

- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer.
- Montrer que la fonction g^{-1} n'est pas dérivable à droite en 0.
- Construire (C_f) , (Δ) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : -3 \leq u_n \leq 1$
- A) Étudier la monotonie de (u_n)
 - déduire que la suite (u_n) est convergente
- On pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison et son premier terme
 - donner l'expression de (v_n) puis u_n en fonction de n
- Calculer la limite de (u_n)

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

et soit f la fonction numérique définie sur $I = [1; +\infty[$

par :
$$f(x) = \frac{5x - 1}{x + 3}$$

1) Montrer que f est strictement croissante sur I

et en déduire que : $f([1; +\infty[) \subset [1; +\infty[$

2) Montrer que : $(\forall x \in I) \quad f(x) - x = -\frac{(x-1)^2}{x+3}$

puis en déduire que : $(\forall x \in I) \quad f(x) \leq x$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$

4) Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

5) Calculer la limite de la suite (u_n) .

6) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de

raison $r = \frac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n .

c) Retrouver la limite de la suite (u_n) .