Pr. Drissi Jalal Année scolaire : 2024/2025	Devoir libre N°2 Semestre 1	GAMMAFORMATION خاص بتلاميذ العرض TEL : 07 02 21 57 73

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x+1|(\sqrt{|x+1|} - 2)^2$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de (C_f).

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat géométriquement.

3) Déterminer l'intersection de la courbe (C_f) avec les axes de repère sur $[-1; +oo[$.

4) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

5) Montret que $(\forall x \in]-1; +oo[) : f'(x) = \frac{2x(x-3)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+2)}$

6) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

7) Déterminer les extremums locaux de f sur D_f .

8) En exploitant le tableau de variation de la fonction f'.

x	$-oo$	-5	$-\frac{13}{4}$	-2	-1	0	$\frac{5}{4}$	3	$+oo$
$f'(x)$	$-oo$	0	$\frac{1}{2}$	0	-4 ‖ 4	0	$-\frac{1}{2}$	0	$+oo$

a) Déterminer le signe de f'' sur $D_{f''}$

b) Dresser le tableau de concavité de (C_f) sur D_f .

c) Déterminer les points d'inflexions de (C_f).

9) Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation

$y = x + 1$ sur $[-1; +oo[$.

10) Soit g la restriction de la fonction f sur $[0; 3]$.

a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer.

b) Montrer que la fonction g^{-1} n'est pas dérivable à droite en 0.

c) Construire (C_f), $(\Delta) et$ $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : -3 \leq u_n \leq 1$
2. A) Etudier la monotonie de (u_n)

   B) déduire que la suite (u_n) est Convergente
3. On pose : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

   A) Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison et son premier terme

   B) donner l'expression de (v_n) puis u_n en fonction de n
4. Calculer la limite de (u_n)

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

et soit f la fonction numérique définie sur $I = [1;+\infty[$

par : $$f(x) = \frac{5x-1}{x+3}$$

1) Montrer que f est strictement croissante sur I

et en déduire que : $f([1;+\infty[) \subset [1;+\infty[$

2) Montrer que : $(\forall x \in I)\ f(x) - x = -\dfrac{(x-1)^2}{x+3}$

puis en déduire que : $(\forall x \in I)\ f(x) \leq x$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 1$

4) Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

5) Calculer la limite de la suite (u_n).

6) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Retrouver la limite de la suite (u_n).