Exercice (5)

$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \quad ; \quad v_1 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + v_n}{6} \quad ; \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1- montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : u_n < v_n$

2- montrer que $(u_n)_n$ est croissante et que $(v_n)_n$ est décroissante.

3- montrer que :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}\left(v_n - u_n\right).$$

4- déduire que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : \; v_n - u_n \leq 6\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

Exercice 8

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = -\frac{3}{4} \quad et \quad U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5}$$

1) a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = 1 - \frac{6}{2U_n + 5}$

b) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ -1 < U_n < -\frac{1}{2}$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

3) on pose $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) déterminer U_n en fonction de n

4) a) montrer que :

4) a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left|U_{n+1} + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{6}{7}\left|U_n + \frac{1}{2}\right|$$

b) montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left|U_n + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

Exercice (3)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ *et* $(b_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par :

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{3} \\ a_{n+1} = \dfrac{n+3+2na_n}{3n+3} : \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \qquad b_n = n(1-a_n)$$

1- montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n < 1$ et que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

2- montrer que $(b_n)_n$ est une suite géométrique

3- calculer a_n en fonction de n .

4- calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} ka_k$.

Exercice (7)

Soient les suites :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ et } v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- déterminer la nature de la suite $(v_n)_n$.

2- déterminer de deux manières la somme Suivante :

$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} w_k$ et déduire u_n en fonction de n.

exercice 5

Soit $\left(u_n\right)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4} u_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour tout entier n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = 2^n u_n$

1. montrer que $\left(v_n\right)_n$ est arithmétique
2. déterminer v_n puis u_n en fonction de n

on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ *et* $T = \prod_{k=1}^{n} u_k$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3. montrer que $S_n = 3 - \dfrac{n+3}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{(n+1)!}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

EXERCICE 3

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation

$(E)\quad 8X^3 - 6X - 1 = 0$

1. montrer que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
2. résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation

$$\cos 3x = \frac{1}{2}$$

3. en déduire les solutions de (E)
4. déterminer les valeurs de

$$a = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$$

et $b = \cos\frac{\pi}{9}\,\cos\frac{7\pi}{9}\,\cos\frac{13\pi}{9}$

EXERCICE 6

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) montrer que

$$sin\left(\frac{\pi}{6}\right)sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{6}\right) - cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)\right]$$

b) montrer que

$$sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times S_n = \frac{1}{2}\left[cos\frac{\pi}{6} - cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{6}\right)\right]$$

c) déduire $S_n = 2\,sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)sin\left(\frac{(n+1)\pi}{6}\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

On pose $F(x) = \cos 3x + \cos 2x$

1) calculer $F\left(\frac{\pi}{5}\right)$

2) vérifier que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

3) en déduire que

$$F(x) = (1+\cos x)\left(4\cos^2 x - 2\cos x - 1\right)$$

4) déterminer la valeur de $\cos\frac{\pi}{5}$