EXERCICE2 :(3.5 points)

Soit m un nombre **complexe non réel** ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$)

I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E) \ : \ z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E)

2- On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

0.5 a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$

0.25 b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les points suivants :

A le point d'affixe $a=1+i$, B le point d'affixe $b=(1+i)m$, C le point d'affixe $c=1-i$, D l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

0.5 1- a) Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega=\frac{(1-i)(1-m)}{2}$

0.25 b) Calculer $\frac{b-a}{\omega}$

0.5 c) En déduire que $(O\Omega)\perp(AB)$ et que $AB=2O\Omega$

2- La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

0.5 a) Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\frac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.

0.25 b) En déduire h en fonction de m

EXERCICE1 :(3.5 points)

Soit α un nombre complexe non nul.

I- On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

(E_α) : $z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

0.25 1-a- Vérifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = \alpha^2$

0.5 b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

0.5 2- Sachant que $\alpha = |\alpha| e^{i\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponentielle.

II- On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points Ω , M_1 et M_2 d'affixes respectivement α , $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

0.5 1-a-Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

0.25 b- En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et OM_1M_2 sont équilatéraux.

0.25 2-a- Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$

0.5 b- Montrer que Les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales.

0.25 c- En déduire que $O\Omega M_1M_2$ est un losange .

0.25 2-a- Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$

0.5 b- Montrer que Les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales.

0.25 c- En déduire que $O\Omega M_1 M_2$ est un losange .

0.5 3- Montrer que pour tout réel θ , le nombre : $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha| e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha| e^{i\theta}}$ est un réel.

EXERCICE 3 : (3,5 points)

	Soit m un nombre complexe .
	I- On considère dans l'ensemble complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :
	$$z^2+(im+2)z+im+2-m=0$$
0,25	1- a) Vérifier que $\Delta=(im-2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)
0,5	b) Donner, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)
0,5	2- Pour $m=i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.
	II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
	On considère les points A, Ω, M et M' d'affixes respectifs $a=-1-i$, $\omega=i$, m et $m'=-im-1+i$
	1- Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'
0,25	a) Vérifier que Ω est le centre de R
0,5	b) Déterminer l'affixe b de B, où B est le point tel que : $A=R(B)$
0,5	2- a) Vérifier que : $m'-a=\frac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$
0,5	b) En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B, Ω et M sont cocycliques .
0,5	c) Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A, M et M' soient alignés Est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon .

<u>EXERCICE4</u> : (10 points)

PARTIE I

On considère la fonction g définie sur $I =]-1,+\infty[$ par : $g(x)=1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$

0.25 1- a- Montrer que : $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=2$

0.5 b- Montrer que : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$

0.5 2- Montrer que g est dérivable sur I et que $(\forall x \in I)$ $g'(x)=-2(1+2x)\ln(1+x)$

3- On donne le tableau de variations de g :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	2	↘	$\frac{5}{4}-\frac{\ln 2}{2}$	↗	1	↘	$-\infty$

0.5 a-Montrer qu'il existe un réel strictement positif α unique tel que : $g(\alpha)=0$

0.25 b- Vérifier que : $\alpha<1$ (On prendra : $\ln 2 = 0.7$)

0.5 c- En déduire que : $(\forall x \in]-1,\alpha[) \quad 0 < g(x)$ et que : $(\forall x \in]\alpha,+\infty[) \quad g(x) < 0$

Partie II : On considère la fonction f définie sur $I =]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 1-a- Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.75 2- a- Montrer que f est dérivable sur I et que $(\forall x \in I) \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$

0.5 b- Donner le sens de variation de f sur I

0.75 c- Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ et que : $(\forall x \in I) \quad f(x) \leq \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

0.25 3-a- Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

0.5 b- Montrer que : $(\forall x > 0) \quad \ln(1+x) < x$

0.25 c- En déduire que : $(\forall x > 0) \quad f(x) < x$

1 d- Représenter graphiquement (T) et (C) (On prendra : $\alpha = 0.8$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

EXERCICE4 : (10 points)

PARTIE I : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)$

et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.5 2- a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f'(x)=4\left(e^{-x}-1\right)\left(1-x\right)$

0.75 b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

c) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2},2\right[$ tel que $f(\alpha)=0$

0.5

(On prendra $e^{\frac{3}{2}}=4,5$)

0.25 d) Vérifier que : $e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}$

0.5 3-a) En appliquant le théorème de ROLLE à la fonction f', montrer qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f''(x_0)=0$

0.5 b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f'', montrer que, pour tout

0.5	b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f'', montrer que, pour tout réel x différent de x_0 de l'intervalle $[0,1]$, on a : $\dfrac{f''(x)}{x-x_0} > 0$

0.25	c) En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe (C)
0.5	4-a) Etudier les branches infinies de la courbe (C)
0.5	b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ (On prendra : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$, $f(1) = -0.5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I)
0.25	5-a) Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty, \alpha])$: $f(x) \leq 0$

PARTIE II : On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 < \alpha \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) + u_n$$

0.5 1-a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < \alpha$ (utiliser la question 5-a) de la PARTIE I)

0.25 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2- **On suppose que** $0 \le u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ; \quad g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

0.5 a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ; \quad g(x) > 0$ (On prendra : $\ln 2 = 0.69$)

0.5 b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad 0 \le u_n$

(On remarque que : $f(x) + x = 4xg(x)$)

0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

0.5 d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3- **On suppose que** $u_0 < 0$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} - u_n \le f(u_0)$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_n \le u_0 + nf(u_0)$

0.25 c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$