Exercice (1)

Soit f *une application définie sur* $\mathbb{R}$ *par* : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x + 1}$

☺ *résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $f(x) = \dfrac{1}{3}$.

f est-elle injective ?

☺ *montrer que* $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) \geq 0$. *f est-elle surjective ?*

☺ *soit* g *la restriction de* f *sur* $\mathbb{R}^+$. *Montrer que* g *est bijective de* $\mathbb{R}^+$ *vers* $[0,1[$ *puis définir sa réciproque* g^{-1}

Exercice (2)

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 2}$

1) on pose $A = \left\{1, \dfrac{1}{2}\right\}$ déterminer $f^{-1}(A)$. f est-elle surjective ?

2) prouver que $f(\mathbb{R}^+) = \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$

3) soit g l'application définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$ par : $g(x) = f(x)$

a) montrer que g est injective

b) déduire que g réalise un bijection $\mathbb{R}^+$ vers $\left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$ et définir g^{-1}

exercice (3)

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x|x|}{x^2+1}$

1) étudier la parité de f et montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad 0 \leq f(x) < 1$

2) en déduire que f est bornée

3) a) montrer que pour tous x ; y de $\mathbb{R}^+$ $x \neq y$ on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{2(x+y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$

b) étudier le sens de variation de f su $\mathbb{R}^+$ puis déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^-$

Exercice 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x$

1) montrer que pour tous x ; y de $\mathbb{R}$ et $x \neq y$ on a : $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = x^2 + y^2 + xy - 3$

2) étudier le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$; $]-\infty, -1]$ et $[-1, 1]$

3) soient $a_n, \dots\dots\dots, a_2, a_1$ des réels de $\mathbb{R}^+$, tels que : $a_1 \times a_2 \times \dots\dots \times a_n = 1$

Montrer que $(2 + a_1^3)(2 + a_2^3) \times \dots\dots \times (2 + a_n^3) \geq 3^n$

4) soit h la fonction telle que : $h(x) = (x - 1)\sqrt{x + 2}$

Vérifier que $f(\sqrt{x + 2}) = h(x)$ en déduire les variations de h sur $[-1, +\infty[$ et $[-2, -1]$

Exercice 1. ABC est un triangle avec E le milieu de $[AB]$, F le point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, et G le point vérifiant $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure
2. Démontrer que les droites (CE), (BF) et (AG) sont concourantes.

Exercice 2. ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 5$. G est le centre de gravité de ABC.
Déterminer et construire (ζ) l'ensemble des points M dans chaque cas :

1. $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6$
2. $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$
3. $\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$.

Exercice (6)

Soit la suite : $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + \dfrac{2}{u_{n-1}}\right) \\ u_1 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

1- montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) :\ u_n > \sqrt{2}$.

2-a) montrer que :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) déduire : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) : u_{n+1} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

et que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) : u_n - \sqrt{2} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice (7)

Soient les suites :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et } v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- déterminer la nature de la suite $(v_n)_n$.

2- déterminer de deux manières la somme Suivante :

$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} w_k$ et déduire u_n en fonction de n.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+x-2}$
$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2+3x+2}$	$\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{3x^2-5x+2}{9x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$
$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^4+3x+1}{x^3+2x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x-2}-1}{\sqrt{x}-1}$	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x^2-16}$
$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{5\sqrt{x}-x\sqrt{5}}{x\sqrt{x}-5\sqrt{5}}$	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3x-2}+1}{x-\sqrt{x-1}-1}$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{x-3\sqrt{x}+2}$

Exercice (2)

Calculer les limites ci-dessous :

$$\lim_{x\to+\infty}3x^2-5x+2 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x^3-4x^2+9 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}(2x+1)^2-5x^2+3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x-3}{(x-1)} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+1}{(x-2)^2} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x}{x^2-2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x^2-x-1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{x+1}-2x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+2x \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}-x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-1}-x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+2x \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}-3}{3\sqrt{x}+2} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x}+2}$$