✧✧✧✧✧

Examen National blanc I

2ème baccalauréat Science expérimentale

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵏⴰⴷⴰⵏⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

Lycée qualifiant : HOUARA | Prof : TABRART ABDELAZIZ

Matière	Mathématique	Durée	3 heures
Filière	Science expérimentale : PC et SVT	Coefficient	7

INSTRUCTION GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient .
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter .
- ✓ Ecrire lisiblement et vérifier que le sujet est complet : il comporte 3 page numérotées de 1 à4, celle-ci est comprise.
- ✓ Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen .

COMPOSANTS DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartie suivant les domaines comme suite :

Exercice 1	Suites Numériques	4pts
Exercice 2	Nombres complexes	3pts
Exercice 3	Extrait bac 2020	3pts
Problème	Etude d'une fonction numérique	10pts

- ✓ $\ln$ Désigne la fonction logarithme népérien
- ✓ $\bar{a}$ le conjuguée du nombre complexe a .

tabrart@gmail.com 23 janvier 2025

Exercice1

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique définie par : $\begin{cases} U_1 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n - 2}{2U_n - 1} \end{cases}$

0.5pt 1. Montrer par récurrence que $\left(\forall n\in \mathbb{N}^*\right)$: $U_n > 1$.

0.5pt 2. Montrer que $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-2(U_n - 1)^2}{2U_n - 1}$

0.5pt 3. Montrer que la suite U_n est décroissante, puis déduire qu'il est convergente.

4. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$

0.5pt a- Montrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison 2 .

0.5pt b- Exprimer (V_n) en fonction de n.

0.5pt c- Déduire que $\left(\forall n\in \mathbb{N}^*\right)$: $U_n = 1 + \dfrac{1}{2n}$. Puis Calculer $\lim U_n$.

0.5pt 5. Déterminer le plus petite entier naturel pour laquelle $U_n \le 1{,}009$

0.5pt 6. Calculer la limite de la suite (w_n) définie par $\left(\forall n\in \mathbb{N}^*\right)$ $w_n = \ln(U_n)$

Exercice2

0.5pt I. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivant : $iz - 4 = 2z + 3i$.

II. On considère les nombres complexe suivantes

$$a = 1 + \sqrt{3} + \left(\sqrt{3} - 1\right)i \quad \text{et} \quad b = \sqrt{3} - 1 + \left(\sqrt{3} + 1\right)i \quad \text{et} \quad c = \sqrt{3} - i$$

0.5pt 1. Ecrire le nombre complexe c sous forme trigonométrique .

0.5pt 2. a- Vérifier que $(1+i)c = a$ et $i \times \bar{a} = b$.

0.5pt b- déduire la forme trigonométrique de a et b .

III. le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$

On considère les points $A(10 - i)$, $B(4 + i)$ et $C(1 + 2i)$

0.5pt 3. Montrer que les points A ;B et C sont alignés .

0. 5pt 4. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $|iz - 4i + 1| = |\sqrt{6} + \sqrt{2}i|$

Exercice3

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$.

0.5pt 1. Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

0.5pt 2. Montrer que f est croissante sur $[1;+\infty[$.

0.5pt 3. En déduire que $(\forall x\in[1;+\infty[):0\leq \ln(x)\leq 2\sqrt{x}$ Remarquer que $2\sqrt{x}-2\leq 2\sqrt{x}$

0.5pt 4. Montrer que $(\forall x\in[1;+\infty[):0\leq \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}\leq \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

0. 5pt 5. Vérifier que la fonction $x\mapsto x\ln(x)-x$ est le primitive de $x\mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$

0.5pt 6. Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $F(1)=2$.

Problème : Le plan rapporté a un repère orthonormée $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que $\|\vec{i}\|=1cm$

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+(\ln x)^2} & ;x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0.5pt 1. Montrer que f continue à droite en 0.

0.5pt 2. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5pt 3. a- Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$ $f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$

0.5pt b- En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

0.75pt c- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ puis déterminer la nature du branche infinie de $\left(C_f\right)$ en $+\infty$

0.75pt 4. a- Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{(\ln(x)-1)^2}{\left(1+\ln^2 x\right)^2}$

0.75pt b- Dresser le tableau de variation de f

0. 5pt c- Vérifier que $f'(e)=0$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5pt 5. a- Montrer que l'équation du (T) tangente de $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 1 est (T): $y=x$

0.5pt b- Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{-x(\ln x)^2}{1+\ln^2 x}$

0.5pt c- En déduire la position relative de $\left(C_f\right)$ et la droite (T)

1 pt 6. Construire $\left(C_f\right)$ et (T) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0.5pt 7. a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer .

0.5pt b-Vérifier que $f(e^2)=\dfrac{e^2}{5}$ puis calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{e^2}{5}\right)$

8. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_{n+1}=f(U_n) \\ U_0=1 \end{cases}$

0. 5pt a- Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $1\le U_n\le e$.

0.5pt b- Montrer que $(U_n)_n$ est décroissante. On pourra utiliser question 5.c .

0.75pt c- Déduire que (U_n) est convergente puis déterminer sa limite.