



# Examen National blanc I

2<sup>ème</sup> baccalauréat Science expérimentale

المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
التعليم الأولي والرياضة



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتعليم الأولي والرياضة

Lycée qualifiant : HOUARA

Prof : TABRART ABDELAZIZ

Matière

Mathématique

Durée

3 heures

Filière

Science expérimentale : PC et SVT

Coefficient

7

## INSTRUCTION GENERALES

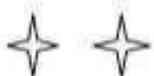
- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient .
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter .
- ✓ Ecrire lisiblement et vérifier que le sujet est complet : il comporte 3 page numérotées de 1 à4, celle-ci est comprise.
- ✓ Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen .

## COMPOSANTS DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartie suivant les domaines comme suite :

Exercice 1	Suites Numériques	4pts
Exercice 2	Nombres complexes	3pts
Exercice 3	Extrait bac 2020	3pts
Problème	Etude d'une fonction numérique	10pts

- ✓  $\ln$  Désigne la fonction logarithme népérien
- ✓  $\bar{a}$  le conjuguée du nombre complexe  $a$  .



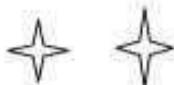
### Exercice1

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite numérique définie par : 
$$\begin{cases} U_1 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n - 2}{2U_n - 1} \end{cases}$$

- 0.5pt 1. Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n > 1$ .
- 0.5pt 2. Montrer que  $U_{n+1} - U_n = \frac{-2(U_n - 1)^2}{2U_n - 1}$
- 0.5pt 3. Montrer que la suite  $U_n$  est décroissante, puis déduire qu'il est convergente.
- 0.5pt 4. On considère la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$
- 0.5pt a- Montrer que la suite  $(V_n)$  est arithmétique de raison 2.
- 0.5pt b- Exprimer  $(V_n)$  en fonction de  $n$ .
- 0.5pt c- Déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n = 1 + \frac{1}{2n}$ . Puis Calculer  $\lim U_n$ .
- 0.5pt 5. Déterminer le plus petite entier naturel pour laquelle  $U_n \leq 1.009$
- 0.5pt 6. Calculer la limite de la suite  $(w_n)$  définie par  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : w_n = \ln(U_n)$

### Exercice2

- 0.5pt I. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivant :  $iz - 4 = 2z + 3i$ .
- 0.5pt II. On considère les nombres complexe suivantes  
 $a = 1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i$  et  $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$  et  $c = \sqrt{3} - i$
- 0.5pt 1. Ecrire le nombre complexe  $c$  sous forme trigonométrique.
- 0.5pt 2. a- Vérifier que  $(1+i)c = a$  et  $i \times \bar{a} = b$ .  
b- déduire la forme trigonométrique de  $a$  et  $b$ .
- 0.5pt III. le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$   
On considère les points  $A(10 - i)$ ,  $B(4 + i)$  et  $C(1 + 2i)$
- 0.5pt 3. Montrer que les points A, B et C sont alignés.
- 0.5pt 4. Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tel que :  $|iz - 4i + 1| = \sqrt{6} + \sqrt{2}i$

**Exercice3**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$ .

0.5pt

- Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$

0.5pt

- Montrer que  $f$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ .

0.5pt

- En déduire que  $(\forall x \in [1; +\infty[) : 0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$  Remarquer que  $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$

0.5pt

- Montrer que  $(\forall x \in [1; +\infty[) : 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$  puis déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$

0.5pt

- Vérifier que la fonction  $x \mapsto x \ln(x) - x$  est la primitive de  $x \mapsto \ln(x)$  sur  $]0, +\infty[$

0.5pt

- Déterminer la fonction primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  tel que :  $F(1) = 2$ .



**Problème :** Le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + (\ln x)^2} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 0.5pt 1. Montrer que  $f$  continue à droite en 0.
- 0.5pt 2. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$  puis interpréter géométriquement le résultat.
- 0.5pt 3. a- Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$   $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$
- 0.5pt b- En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 0.75pt c- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  puis déterminer la nature du branche infinie de  $(C_f)$  en  $+\infty$
- 0.75pt 4. a- Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{(\ln(x)-1)^2}{(1+\ln^2 x)^2}$
- 0.75pt b- Dresser le tableau de variation de  $f$
- 0.5pt c- Vérifier que  $f(e) = 0$  puis interpréter géométriquement le résultat.
- 0.5pt 5. a- Montrer que l'équation de la tangente de  $(C_f)$  au point d'abscisse 1 est  $(T)$  :  $y = x$
- 0.5pt b- Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :  $f(x) - x = \frac{-x(\ln x)^2}{1 + \ln^2 x}$
- 0.5pt c- En déduire la position relative de  $(C_f)$  et la droite  $(T)$
- 1 pt 6. Construire  $(C_f)$  et  $(T)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 0.5pt 7. a- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J$  à déterminer.
- 0.5pt b- Vérifier que  $f(e^2) = \frac{e^2}{5}$  puis calculer  $(f^{-1})\left(\frac{e^2}{5}\right)$
- 0.5pt 8. Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :  $\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 = 1 \end{cases}$
- 0.5pt a- Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N})$  :  $1 \leq U_n \leq e$
- 0.5pt b- Montrer que  $(U_n)_n$  est décroissante. On pourra utiliser question 5.c.
- 0.75pt c- Déduire que  $(U_n)$  est convergente puis déterminer sa limite.