

DEVOIR

**Exercice 1**  $(U_n)_n$  معرفة *المعرفة* une suite réelle telle que :  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = \frac{6U_n}{1+15U_n}$

1) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > \frac{1}{3}$

2) Étudier la monotonie de  $(U_n)_n$  en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq 1$

3) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{6} \left( U_n - \frac{1}{3} \right)$  en déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3} \left( \frac{1}{6} \right)^n$

4) on pose  $V_n = 1 - \frac{1}{3U_n}$  pour tout entier naturel  $n$

a) montrer que  $(V_n)_n$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{6}$

b) calculer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$

c) on pose  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$  et  $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{U_k}$  déterminer  $S_n$  en fonction de  $n$

en déduire que  $T_n = 3n + \frac{3}{5} + \frac{12}{5} \left( \frac{1}{6} \right)^{n+1}$

**Exercice 2** Soit la suite  $(U_n)_n$  définie par  $U_1 = 5$  et  $U_{n+1} = 3U_n + 4^n$ . on pose  $V_n = 4U_n - U_{n+1}$

1) calculer  $U_0$ ,  $U_2$  et  $V_0$

2) montrer que  $(V_n)_n$  est géométrique de raison  $q = 3$  et calculer  $V_n$  en fonction de  $n$

3) on pose  $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$  et  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$

a) déterminer  $T_n$  en fonction de  $n$

b) montrer que  $V_n = U_n - 4^n$  en déduire que  $U_n = 4^n + 3^{n-1}$

c) montrer que  $T_n - 3S_n = U_0 - U_{n+1}$  puis déterminer  $S_n$  en fonction de  $n$

**Exercice 3** On considère la suite  $(U_n)_n$  telle que  $U_0 = 0$ ;  $U_1 = 1$  et  $U_{n+2} = \frac{1}{6}U_{n+1} + \frac{1}{6}U_n$

On pose  $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$  et  $W_n = U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n$

1) a) montrer que  $(V_n)_n$  est géométrique et calculer  $V_n$  en fonction de  $n$

b) montrer que  $(W_n)_n$  est géométrique et calculer  $W_n$  en fonction de  $n$

2) on pose  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} W_k$  et  $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$

a) calculer  $S_n$  en fonction de  $n$  et déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$

c) prouver que  $T_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{10} \left( -\frac{1}{3} \right)^n - \frac{6}{5} \left( \frac{1}{2} \right)^n$

**TD CALCUL TRIGONOMETRIQUE**  
**EXERCICES D'APPLICATIONS ET DE REFLEXIONS**

PROF : ATMANI NAJIB

1BAC SM BIOF

**TD-CALCUL TRIGONOMETRIQUE**

**Exercice1 :** 1) Calculer  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$

2) Calculer  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$

3) montrer que :  $\cos x = \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$

4) montrer que :  $\sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x = 0$

**Exercice2 :**

Soient :  $0 < a < \frac{\pi}{2}$  et  $0 < b < \frac{\pi}{2}$  et  $\cos a = \sin b = \frac{1}{2}$

1) Calculer :  $\sin a$  et  $\cos b$

2) Calculer :  $\sin(a+b)$

**Exercice3 :** Calculer  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{11\pi}{12}$

**Exercice4 :** calculer  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$

**Exercice5 :** Sachant que  $\sin x = \frac{1}{2}$  et  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

calculer :  $\cos(2x)$  et  $\sin(2x)$

**Exercice6 :** Montrer que :  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2 \forall x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$

**Exercice7 :** Montrer que :

1)  $1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$

2) si  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\sin \alpha \neq -1$  alors

$$\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \tan^2 \left( \frac{\pi - \alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

**Exercice8 :** Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}$

1)  $\sin^2 2x - \cos 2x - 1 = -2 \cos^2 x \times \cos 2x$

2)  $2 \sin^2 x + 12 \cos^2 x = 5 \cos 2x + 7$

**Exercice10 :** Calculer  $\tan \frac{11\pi}{12}$

**Exercice11 :**

1- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 + 2x - 1 = 0$

2- En déduire  $\tan \left( \frac{\pi}{8} \right)$

**Exercice12 :** soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que :  $\tan \frac{a}{2} = \sqrt{2}$

Calculer  $\cos a$  et  $\sin a$  et  $\tan a$

**Exercice13 :** 1- Montrer que  $\tan \left( \frac{\pi}{12} \right) = 2 - \sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :

(E):  $2 \cos x - 2 \sin x - 1 - \sqrt{3} = 0$

a) Vérifier que  $\pi + 2k\pi$  n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant :  $t = \tan \left( \frac{x}{2} \right)$ , résoudre l'équation (E)

(remarquer que  $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ )

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

**Exercice14 :** Transformer en produits les expressions suivantes :

1)  $A(x) = \sin 2x + \sin 4x$

2)  $B(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$

**Exercice15 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$

**Exercice16 :** écrire sous la forme d'une somme

1)  $\cos 2x \times \sin 4x$  2)  $\sin x \times \sin 3x$  3)  $\cos 4x \times \cos 6x$

**Exercice17 :** calculer

1)  $\cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$  2)  $\sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$

**Exercice18 :** Montrer que

1)  $\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left( \frac{5\pi}{11} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{11} \right)$

2)  $\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = -2 \cos \left( \frac{5\pi}{11} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{11} \right)$

3) en déduire que:  $\frac{\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11}}{\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11}} = -\frac{\tan \left( \frac{5\pi}{11} \right)}{\tan \left( \frac{2\pi}{11} \right)}$

**Exercice19 :** Montrer que  $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \tan 3x \times \tan x$

**Exercice20 :** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$

$\cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = -\sin 4x \times \sin x$

**Exercice21 :** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$

1)  $\sin 3x = \sin x \times (3 - 4 \sin^2 x)$

2)  $\cos 3x = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$

3)  $\cos(4x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

4)  $\sin(4x) = 4 \sin x (2 \cos^2 x - \cos x)$

5)  $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x)$

**Exercice22 :**  $P(x) = \sin 2x - \sin x$  et  $Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$

Montrer que :  $P(x) = \sin x (2 \cos x - 1)$  et

$$Q(x) = \cos x (2 \cos x + 1)$$

**Exercice23 :** 1- Linéariser :  $2 \cos^2 x \cdot \sin(2x)$

2- Linéariser :  $\cos^3 x$

**Exercice24 :** 1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle  $] -\pi, \pi ]$

**Exercice25 :**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle  $] -\pi, \pi ]$

**Exercice26 :**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

**Exercice27 :1)** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équations

suivantes :  $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

**2)** Résoudre dans  $[0; \pi]$  l'équations suivantes :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

**3)** Résoudre dans  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  l'équations suivantes :

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

**Exercice28 :**  $\cos x - \sin x \quad a=1$  et  $b=-1$

calculons :  $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

**Exercice29 :** Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

**Exercice30 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) + 2 = 0$$

**Exercice31 :** Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation

$$\cos x \geq \frac{1}{2}$$

**Exercice32 :** Résoudre dans  $[0, 3\pi]$  l'inéquation :

$$2 \cos x + \sqrt{3} \leq 0$$

**Exercice33 :** Résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'inéquation

$$\sin x \geq \frac{1}{2}$$

**Exercice34 :** Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'inéquation

suivante :  $\tan x - 1 \geq 0$

**Exercice35 :** Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation

suivante :  $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

**Exercice36 :** 1) Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$$

2) Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1$$

**Exercice37 : 1)** a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équations

suivantes :  $2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 = 0$  et en déduire les solutions dans  $[0; 2\pi]$

b) résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'inéquation suivante :

$$2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 \leq 0$$

**2)** Résoudre dans  $[0; \pi]$  l'inéquation suivante :

$$(2 \cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$$

**Exercice38 :** 1. Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  l'inéquation :

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{2}$$

2. Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  l'inéquation :

$$4 \cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{2} \leq 0$$

3. Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  l'inéquation :  $\frac{1 + \tan x}{\sin 2x} \geq 0$

**Exercice39 :**

Résoudre dans  $[-\frac{11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}]$  l'équation  $\sin 3x \geq \frac{1}{2}$

**Exercice40 ::** soit  $x \in \mathbb{R}$  on pose :

$$A(x) = \cos 3x - 3 \sin x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1) calculer  $\cos 3x$  en fonction de  $\cos x$

Et calculer  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$

2) en déduire une écriture simple de  $A(x)$

3)a) Résoudre dans  $I = [-\pi; \pi]$  l'équation:  $A(x) = \frac{1}{2}$

3)b) Résoudre dans  $I$  l'inéquation:  $A(x) \leq \frac{1}{2}$

**Exercice41 :** on pose :

$$A = \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{3\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9}$$

1) monter que :  $\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$

2) monter que :  $\cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

3) en déduire que :  $A = \frac{3}{16}$

**Exercice 42:** soit :  $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  tel que :  $3 \sin \theta + 5 \cos \theta = 5$

1) monter que :  $5 \sin \theta - 3 \cos \theta = 3$

2) déduire la valeur de :  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**

