

Suites numériques

Exercice 1

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

b) En déduire que $(U_n)_{n \geq 1}$ est bornée

Exercice 2

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par

$$: U_0 = -1 \quad , \quad U_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n$$

1) on pose $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$ et $W_n = 2^n U_n$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique puis calculer V_n en fonction de n

b) montrer que $(W_n)_n$ est une suite arithmétique puis calculer W_n en fonction de n

2) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{2n-1}{2^n}$

3) on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$ prouver que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

Exercice 3

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que :

$$U_0 = 2 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} \left(U_n^2 - U_n + \frac{1}{2} \right)}$$

On pose $V_n = U_n^2 - U_n$ pour tout entier n de \mathbb{N}

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 1$

2) a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8}{2^n}}$$

3) démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Exercice 4

On considère la suite $(U_n)_n$ définie

$$\text{par : } U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{7U_n + 6}{U_n + 2}$$

1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n < 6$

b) étudier la monotonie de $(U_n)_n$

2) on pose $V_n = \frac{U_n - 6}{U_n + 1}$ pour tout

entier naturel n

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) déterminer U_n en fonction de n

3) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - 6| \leq \frac{1}{2} |U_n - 6|$$

4) montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n - 6| \leq 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 5

Soit $(U_n)_n$ la suite telle que :

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = U_n^2 + U_n$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 1$

2) montrer que $(U_n)_n$ est croissante

3) a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} \geq 2U_n$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 2^n$

Exercice 6

$(U_n)_n$ une suite telle que :

$$U_0 = -2 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 2}{U_n - 2}$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq -1$

2) montrer que $(U_n)_n$ est croissante

Suites numériques

3) a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} + 1| \leq \frac{1}{2} |U_n + 1|$$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n + 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 7

On considère la suite $(U_n)_n$ définie

$$\text{par : } U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + (n+2)U_n} \quad \text{et} \quad U_0 = \frac{1}{3}$$

1) calculer U_1

2) on pose $V_n = \frac{1}{U_n} - n$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique

b) exprimer U_n en fonction de n

3) calculer en fonction de n

la somme $T_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n}$

Exercice 8

Soit la suite $(U_n)_n$ telle que :

$$U_0 = 0 \quad , \quad U_1 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+2} = \frac{1}{6}U_{n+1} + \frac{1}{6}U_n$$

1) on pose :

$$V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n \quad \text{et} \quad W_n = U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n$$

a) montrer que $(V_n)_n$ est géométrique puis déterminer V_n en fonction de n

b) montrer que $(W_n)_n$ est géométrique puis calculer W_n en fonction de n

2) en déduire l'expression de U_n en fonction de n

Exercice 9

On considère les suites $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$

telles que $U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$, $V_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad V_n < U_n$

2) montrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est

décroissante et que $(V_n)_{n \geq 1}$ est croissante

Exercice 10

(suite de Fibonacci)

On considère la suite $(U_n)_n$ définie

$$\text{par : } \begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases}$$

1) a) montrer que $U_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

b) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

2) montrer que $U_n \geq n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

3) montrer que $U_n U_{n+2} + (-1)^{n+1} = (U_{n+1})^2$

4) on pose $x_n = \frac{U_{2n-1}}{U_{2n}}$ et $y_n = \frac{U_{2n}}{U_{2n+1}}$

pour tout n de \mathbb{N}^*

a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad y_n - x_n = \frac{1}{U_{2n} U_{2n+1}}$$

en déduire $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 < y_n - x_n < \frac{1}{n}$

b) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_{n+1} - x_n = \frac{1}{U_{2n} U_{2n+2}}$$

et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_n = \frac{1}{y_n} - 1$

b) montrer que $(x_n)_n$ est croissante et $(y_n)_n$ décroissante

5) on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U_k}{3^k}$

a) calculer $3S_n$ puis $3(3S_n - S_n)$

b) en déduire la relation liant

$$U_n ; S_{n-2} , S_n$$

6) prouver que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

le nombre d'or : $\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

Exercice 4

PARTIE (1) déterminer en fonction de n les deux sommes :

1.5 pts

$$S_1 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2n+1} \quad ; \quad S_2 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{n+3}$$

PARTIE (2) Soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 1 + 4U_n + \sqrt{1 + 4U_n}$

0.5 pt

1) a) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n > 0$

0.5pt

b) montrer que la suite $(U_n)_n$ est croissante

2) on pose $(\forall n \in \mathbb{N}) V_n = \sqrt{1 + 4U_n}$

1.5 pts

montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) V_{n+1}^2 = 4\left(V_n + \frac{1}{2}\right)^2$ en déduire V_{n+1} en fonction de V_n

3) on pose $(\forall n \in \mathbb{N}) W_n = 1 + V_n$

1 pt

a) montrer que $(W_n)_n$ est une suite géométrique en déterminant sa raison

1 pt

b) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = \frac{1}{4}(W_n^2 - 2W_n)$

0.5 pt

c) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = \frac{1}{4}(2^{2n+4} - 2^{n+3})$

1.5 pts

puis montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} U_k = \frac{1}{3} \times 2^{2n+4} - 2^{n+2} + \frac{2}{3}$

Soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 3$; $U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9}$. on pose $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 4}$

- 1) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2(2U_n - 9)}$ et montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 < U_n < 4$
- 2) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n - U_{n+1} = \frac{2(U_n - 1)(U_n - 4)}{2U_n - 9}$; étudier la monotonie de $(U_n)_n$
- 3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) |U_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{3}|U_n - 4|$
b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) |U_n - 4| \leq 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$
- 4) a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{7}$
b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = \frac{7^n + 8}{7^n + 2}$