

Exercice 1:

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{8(U_n-1)}{U_n+2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 < U_n < 4$

2) a- montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n-2)(U_n-4)}{U_n+2}$

b- déduire la monotonie de (U_n) .

3) on pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \frac{U_n-4}{U_n-2}$

a- montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b- exprimer V_n en fonction de n .

c- montrer que : $U_n = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$

Exercice 2:

Soient (C) l'ensemble des points $M(x; y)$ tel que :

$(C) : x^2 + y^2 + 8x - 4y + 10 = 0$ Et la droite $(D) : x - 2y + 13 = 0$

1)a) Montrer que (C) est un cercle et déterminer son centre K et r

b) Montrer que (D) coupe le cercle (C) en deux points E et F

c) Déterminer les coordonnées de E et F

2) Soit $(D') : 3x - y + 4 = 0$ une droite

a) Montrer que la droite (D') est tangente au cercle (C) à un point H

b) Déterminer H le point de tangence de (D') et (C)

Exercice 3:

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1}$ pour tout n de \mathbb{N}

1) a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante

2) a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$

b- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$