I integrale

① Primitive : soit f continue sur I

F est une primitive de f sur I

si : - F derivable sur I

- $F' = f$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}$ alors elle admet une primitive

$F(x) = \arctan(x) + c^{te}$

car : F derivable sur $\mathbb{R}$

$F'(x) = f(x)$

II) l'integrale : soit f continue sur I, F sa primitive et $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exempl

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4$

$= 2(\sqrt{4} - \sqrt{1})$

$= 2(2-1) = 2$

(2) $\displaystyle\int_1^3 E(x)\,dx$, $x \to E(x)$ n'est pas continue sur $[1,3]$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\,dt = x\int_0^1 1.dt$

$= x\left[t\right]_0^1 =$

$= x(1-0) = x$

- $\int \alpha\,dx = [\alpha x]$
- $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}[x^{n+1}]$
- $\int \frac{u'}{u}\,dx = [\ln|u|]$
- $\int \frac{u'}{u^2}\,dx = \left[-\frac{1}{u}\right]$
- $\int u' . u^n\,dx = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]$
- $\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = [\arctan u]$
- $\int u' \cdot v'(u(x)) = [v \circ u(x)]$
- $\int \cos(ax+b)\,dx = \left[\frac{1}{a}\sin(ax+b)\right]$

$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}[\cos(ax+b)]$

$\int u' \cdot e^u\,dx = [e^u]$

Calcul intégrale

1 Calculer les intégrales suivantes

$I_3 = \int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$	$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x(2+\ln x)^3}\,dx$	$I_1 = \int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}\,dx$
$I_6 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$	$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$	$I_4 = \int_0^2 \frac{2x}{x+2}\,dx$

2 A l'aide d'une intégration par parties calculer :

$J_3 = \int_0^2 (x-1)e^{2x}\,dx$	$J_2 = \int_0^1 x\ln(2x+1)\,dx$	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3)\cos x\,dx$
$J_6 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$	$J_5 = \int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$	$J_4 = \int_0^1 x^3 \arctan x\,dx$

① $\frac{U'}{U^2} \Downarrow \left(-\frac{1}{U}\right)$ primitive / dérivée

② $\frac{U'}{\sqrt{U}} \Downarrow 2\sqrt{U}$

③ $\frac{U'}{1+U^2} \Downarrow \operatorname{Arctan} U$

④ $\frac{U'}{U} \Downarrow \ln|U|$

⑤ $\frac{U'}{\sqrt[n]{U^{n-1}}} \Downarrow n\sqrt[n]{U}$

$$\boxed{U'.U^n \Rightarrow \frac{U^{n+1}}{n+1}}$$

puissance

$$I_1 = \int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+4}} \qquad \frac{U'}{\sqrt{U}}$$

$$= \frac{1}{3}\left[2\sqrt{x^3+4}\right]_0^{\sqrt[3]{5}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = \frac{2}{3}$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x(2+\ln(x))^3}$$

$U'.\,U^{-3}$

$$= \int_1^e \frac{1}{x}(2+\ln x)^{-3}\,dx$$

$$= \left[\frac{(2+\ln(x))^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^e$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(2+\ln(x))^{-2}\right]_1^e$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(2+\ln(e))^{-2} - (2+\ln(1))^{-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right) =$$

integration par par parties

$$\boxed{\int_a^b U' \times V\, dx = [UV]_a^b - \int_a^b U V' dx}$$

Dém

$$(UV)' = U'V + V'U$$

$$\Longrightarrow \int_a^b (UV)' dx = \int_a^b U'V dx + \int_a^b V'U dx$$

$$[UV]_a^b = \int_a^b U'V dx + \int_a^b V'U dx$$

D'm $\int_a^b U'V dx = [UV]_a^b - \int V'U dx$

Exemple : $\int_0^1 x e^x dx$ P × E

On pose $V = x \Longleftrightarrow V' = 1$

$U' = e^x \qquad U = e^x$

Astuce ① ② ③ ④ ⑤

A L P E S

A → arctan

L → ln

P → polynom

E → exp

S → sin et cos.

$U'e^U \longrightarrow e^U$

usuelle

$$\int_0^1 \overset{U'V}{x e^x} dx = \overset{U.V}{[x . e^x]_0^1} - \int_0^1 \overset{UV'}{e^x} dx$$

$$= (1e^1 - 0e^0) - [e^x]_0^1$$

$$= e - 0 - (e^1 - e^0)$$

$$= e - 0 - e + 1 = 1$$

Calcul intégrale

1 Calculer les intégrales suivantes

$I_3=\int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$	$I_2=\int_1^e \frac{1}{x(2+\ln x)^3}\,dx$	$I_1=\int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}\,dx$
$I_6=\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$	$I_5=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$	$I_4=\int_0^2\frac{2x}{x+2}\,dx$

2 A l'aide d'une intégration par parties calculer :

$J_3=\int_0^2 (x-1)e^{2x}\,dx$	$J_2=\int_0^1 x\ln(2x+1)\,dx$	$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-3)\cos x\,dx$
$J_6=\int_0^1 x^3e^{-x^2}\,dx$	$J_5=\int_0^{\sqrt3}x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$	$J_4=\int_0^1 x^3\arctan x\,dx$

$I_3 = \frac{1}{2}\int_0^4 (2x+1-1)\sqrt{2x+1}\,dx$ (la decomposition)

$= \frac{1}{2}\int_0^4(2x+1)\sqrt{2x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{2x+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^4 (2x+1)^{3/2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^4(2x+1)^{1/2}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^4 2(2x+1)^{3/2}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^4 2\cdot(2x+1)^{1/2}\,dx$

$u'u^r \Downarrow \frac{u^{r+1}}{r+1}$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{(2x+1)^{3/2+1}}{5/2} - \frac{(2x+1)^{1/2+1}}{1/2+1}\right]_0^4$

$\int(f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{5}(2x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(2x+1)^{3/2}\right]_0^4$

$\int(\alpha f+\beta g)\,dx = \alpha\int f\,dx + \beta\int g\,dx$

= Calcul ...

$I_4 = \int_0^2 \frac{2x}{x+2}\,dx$ (la décomposition)

Astuce

deg(Num) ≥ deg(Den)

$\frac{1}{x+2}\to \ln|x$

$= 2\int_0^2\frac{x+2-2}{x+2}\,dx$

$= 2\int_0^2\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx$

$= 2\left[x-2\ln(x+2)\right]_0^2$

= Calcul

Calcul intégrale

1 Calculer les intégrales suivantes

$I_3 = \int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$	$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x(2+\ln x)^3}\,dx$	$I_1 = \int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}\,dx$
$I_6 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$	$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$	$I_4 = \int_0^2 \frac{2x}{x+2}\,dx$

2 A l'aide d'une intégration par parties calculer :

$J_3 = \int_0^2 (x-1)e^{2x}\,dx$	$J_2 = \int_0^1 x\ln(2x+1)\,dx$	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3)\cos x\,dx$
$J_6 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$	$J_5 = \int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$	$J_4 = \int_0^1 x^3 \arctan x\,dx$

$$I_6 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{(1+x^2)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}(\arctan x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 (\arctan x)'(\underbrace{\arctan x}_{})^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \left[\frac{(\arctan(x))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left[(\arctan(x))^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$I_5 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx$$

$$= -\int_0^{\pi/3} \frac{(\cos(x))'}{\cos^2(x)}\,dx = -\left[-\frac{1}{\cos(x)}\right]_0^{\pi/3}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\pi/3} - \frac{1}{\cos 0}\right) = 2 - 1 = 1$$

Calcul intégrale

1 Calculer les intégrales suivantes

$I_3 = \int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$	$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x(2+\ln x)^3}\,dx$	$I_1 = \int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}\,dx$
$I_6 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$	$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$	$I_4 = \int_0^2 \frac{2x}{x+2}\,dx$

2 A l'aide d'une intégration par parties calculer :

$J_3 = \int_0^2 (x-1)e^{2x}\,dx$	$J_2 = \int_0^1 x\ln(2x+1)\,dx$	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3)\cos x\,dx$
$J_6 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$	$J_5 = \int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$	$J_4 = \int_0^1 x^3 \arctan x\,dx$

ALPES

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} (2x-3)\cos(x)$$

P . S

On pose $U' = \cos(x) \longleftrightarrow U = \sin(x)$

$V = 2x-3 \longleftrightarrow V' = 2$

d'après I.P.P

$$J_1 = \left[(2x-3)\sin x\right]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$$

$$= \left[(2x-3)\sin(x)\right]_0^{\pi/2} + 2\left[\cos(x)\right]_0^{\pi/2}$$

= Calcul ...

$$J_2 = \int_0^1 x\ln(2x+1)\,dx$$

P L

$x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$x^1 \Rightarrow \frac{x^2}{2}$

$V = \ln(2x+1) \longleftrightarrow V' = \frac{2}{2x+1}$

$U' = x \longleftrightarrow U = \frac{x^2}{2}$

la décomposition

$$J_2 = \left[\frac{x^2}{2}\ln(2x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1}\,dx$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2x+1 \\ \hline x^2+\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \\ 0 \quad -\frac{1}{2}x & \\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} & \\ \hline \frac{1}{4} & \end{array}$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln(2x+1)\right]_0^1 - \int \frac{(2x+1)(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})+\frac{1}{4}}{(2x+1)}$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln(2x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4(2x+1)}$$

Calcul intégrale

1 Calculer les intégrales suivantes

$I_3 = \int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$	$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x(2+\ln x)^3}\,dx$	$I_1 = \int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}\,dx$
$I_6 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$	$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$	$I_4 = \int_0^2 \frac{2x}{x+2}\,dx$

2 A l'aide d'une intégration par parties calculer :

$J_3 = \int_0^2 (x-1)e^{2x}\,dx$	$J_2 = \int_0^1 x\ln(2x+1)\,dx$	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3)\cos x\,dx$
$J_6 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$	$J_5 = \int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$	$J_4 = \int_0^1 x^3 \arctan x\,dx$

$J_6 = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$ (5points)

On pose $U' = xe^{-x^2}$ (E) $\longleftrightarrow$ $U = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

$V = x^2 =$ (P) $\longleftrightarrow$ $V' = 2x$

$J_6 = \left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}\right] + \int x\, e^{-x^2} dx$

$e^{-x^2} =$

$U'e^{U}$

$U' = e^{-x^2} \curvearrowright U = \frac{1}{2x}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)\left((-2)xe^{-x^2}\right)$

$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

$J_4 = \int \overset{P}{x^3}\, \overset{A}{\arctan x}\, dx$

$U' = x^3$

$V = \arctan x$

$U' = \frac{x^4}{4}$

$V' = \frac{1}{1+x^2}$

$J_5 = \int_0^{\sqrt{3}} \underset{V}{x^3}\, \underset{U'}{(x^2+1)^{1/2}}$

$= \int_0^{\sqrt{3}} \underbrace{(x^2)}\, \underbrace{(x)(x^2+1)^{1/2}} dx$

On pose $U' = x(x^2+1)^{1/2} \to U = \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)$

$V = x^2 \longrightarrow V' = 2x$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x^2}{2x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{(4x^2-1\ \ +1)}{2x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(2x-1)(2x+1)\ +1}{2x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left((2x-1) + \frac{1}{2x+1}\right)dx$$

3 A l'aide d'une intégration par changement de variable calculer :

$K_3=\int_0^1 \frac{\ln\left(1+e^t\right)}{1+e^{-t}}dt$ ضع $x=1+e^t$	$K_2=\int_1^2 \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}dx$ ضع $t=\sqrt{x-1}$	$K_1=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}dx$. ضع $t=\sqrt{x^2+1}$
$K_6=\int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ضع $x=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$	$K_5=\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ ضع $t=\sqrt{x^2-1}$	$K_4=\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx$ ضع $t=\sqrt{e^x-1}$

4 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que : $(\forall x\in[a,b])\quad f(a+b-x)=f(x)$

1) montrer que $\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$

2) déduire la valeur de $I=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

5 Montrer que $\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}\le\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx\le 1$

$\frac{1}{1+\pi^2}\le\int_{\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\frac{4}{4+\pi^2}$ ، $\frac{\pi}{4}\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t}dt\le\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Exemple :

$$I=\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$$

→ On pose $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x \Rightarrow 2t\,dt=1.dx$

$dx=2t\,dt$

Si $x=1$ alors $t=\sqrt{1}=1$

Si $x=4$,, $t=\sqrt{4}=2$

D'où $I=\int_1^2 \frac{1}{1+t}(2t.dt)$

$=2\int_1^2 \frac{t}{1+t}.dt$

$=2\int_1^2 \frac{t+1-1}{t+1}dt=2\int_1^2 1$

$=2\int_1^2\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left[t-\ln(t+1)\right]_1^2$

$=2\left(2-\ln(3)-1+\ln(2)\right)$

$=2\left(1+\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

3 A l'aide d'une intégration par changement de variable calculer :

$K_3 = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}dt$ ضع $x = 1+e^t$	$K_2 = \int_1^2 \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}dx$ ضع $t = \sqrt{x-1}$	$K_1 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}dx$. ضع $t = \sqrt{x^2+1}$
$K_6 = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ضع $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$	$K_5 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ ضع $t = \sqrt{x^2-1}$	$K_4 = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx$ ضع $t = \sqrt{e^x-1}$

4 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que : $(\forall x \in [a,b]) \quad f(a+b-x) = f(x)$

1) montrer que $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

2) déduire la valeur de $I = \int_0^\pi x\sin x\,dx$

5 Montrer que $\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx \le 1$

$\frac{1}{1+\pi^2} \le \int_{\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2}dx \le \frac{4}{4+\pi^2}$ ، $\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}dt \le \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

$K_1 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} \cdot dx$ 5 points

On pose $t = \sqrt{x^2+1}$

$\Leftrightarrow t^2 = x^2+1$

$\Leftrightarrow (2t) \cdot dt = 2x\,dx$

$\Leftrightarrow t\,dt = x\,dx$

si $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \sqrt{4} = 2$

si $x = 2\sqrt{2} \Rightarrow t = \sqrt{9} = 3$

$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = sh(t)$

$\frac{e^t + e^{-t}}{2} = ch(t)$

$ch^2(t) - sh^2(t) = 1$

cosinus-hyperbolique

$\int sh = [ch]$

donc $K_1 = \int_2^3 \frac{t\,dt}{t-1}$

$= \int_2^3 \frac{t-1+1}{t-1} \cdot dt$

$= \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)dt$

$= \left[t + \ln(t-1)\right]_2^3$

$= 3 + \ln(2) - 2 - \ln(1) = 1 + \ln(2)$

3 A l'aide d'une intégration par changement de variable calculer :

$K_3 = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}\,dt$ $x = 1+e^t$ ضع	$K_2 = \int_1^2 \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\,dx$ $t=\sqrt{x-1}$ ضع	$K_1 = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}\,dx$. $t=\sqrt{x^2+1}$ ضع
$K_6 = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ ضع	$K_5 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ $t=\sqrt{x^2-1}$ ضع	$K_4 = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$ $t=\sqrt{e^x-1}$ ضع

4 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que : $(\forall x \in [a,b]) \quad f(a+b-x) = f(x)$

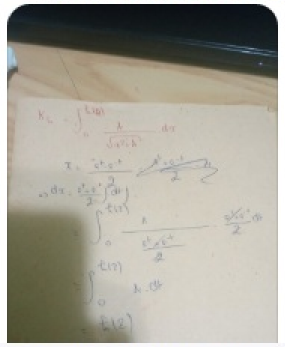
1) montrer que $\int_a^b x f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$

2) déduire la valeur de $I = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

5 Montrer que $\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx \le 1$

$\frac{1}{1+\pi^2} \le \int_{\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx \le \frac{4}{4+\pi^2}$, $\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\,dt \le \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

YR Yasmine Rhazouli à Tout le monde 20:05



Qui peut voir vos messages ? Enregistrement activé

SZ Saad Zahraoui à Tout le monde 20:10

oui

Réduire tout

KM Vous 20:11

$K_6 = \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

on pose $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = sh(t)$ $\quad e^t - e^{-t} = 2x$

$dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = ch(t)$ $\quad e^t - \frac{1}{e^t} = 2x$

Rq : $ch^2(t) - sh^2(t) = 1$ $\quad e^{2t} - 1 = 2x e^t$

si $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = \ln(2) \Rightarrow t = ?$

$e^{2t} - 1 - 2\ln 2\, e^t = 0$

$X^2 - 2\ln 2\, X - 1 = 0$

$K_6 = \int \frac{1}{\sqrt{sh^2(t)+1}} \cdot ch(t)$

$= \int \frac{1}{\sqrt{ch^2(t)}} ch(t)\,dt$

$= \int 1\,.\,dt$

$= [t]_0$

$$\frac{e^{\ln\left(\ln(2)+\sqrt{\ln(2)^{2}+1}\right)}-e^{-\ln\left(\ln(2)+\sqrt{\ln \cdots}\right.}}{2}$$

La parole est à : Keza

6

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$; $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx$ pour tout entier naturel n

1) calculer I_0 , J_0

2) montrer que $I_n + nJ_n = 1$ et $J_n - nI_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$ puis déduire J_n , I_n

$\int \overbrace{e^x . \cos(x)}\, dx$,

$\int x^n e^x \, dx$

$\int x^3 e^x$ (par parties n fois

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$; $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx$ pour tout entier naturel n

2) montrer que $I_n + nJ_n = 1$

Calcul intégrale

7 On considère les intégrales :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad ; \quad J=\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} \quad ; \quad K=\int_0^1 \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx \quad \text{et} \quad L=\int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx$$

1) calculer I

2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $2J=I+\frac{1}{2}$ en déduire J

3) a) Montrer que $K=-I+2J$ et déduire K

b) Poser $t=\arctan x$ et calculer K

4) En posant $t=x+2$ déterminer L

8 Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on pose $I_0=\int_1^e x\,dx$ et $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$

1) calculer I_1 , I_0

2) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ $2I_{n+1}=e^2-(n+1)I_n$

b) en déduire la valeur de I_2

3) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ $I_{n+1}\leq I_n$

b) en déduire que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ $\frac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\frac{e^2}{n+2}$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$; $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

On a $I_1=\int_1^e x\ln(x)\,dx$

ALPES

P L

I.P.P

on pose $U=\ln(x) \Longleftrightarrow U'=1/x$

$V'=x \Longleftrightarrow V=\frac{x^2}{2}$

d'où $I_1=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$

$=\frac{e^2}{2}\ln(e)-\frac{1}{2}\ln(1)-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$

$=\frac{e^2}{2}-0-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$I_1=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$

$I_0=\int_1^e x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}$

Calcul intégrale

7

On considère les intégrales :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad ; \quad J=\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} \quad ; \quad K=\int_0^1 \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx \quad \text{et} \quad L=\int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx$$

1) calculer I

2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $2J=I+\frac{1}{2}$ en déduire J

3) a) Montrer que $K=-I+2J$ et déduire K

   b) Poser $t=\arctan x$ et calculer K

4) En posant $t=x+2$ déterminer L

8

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on pose $I_0=\int_1^e x\,dx$ et $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1) calculer I_1 , I_0

2) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ $2I_{n+1}=e^2-(n+1)I_n$

   b) en déduire la valeur de I_2

3) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ $I_{n+1}\le I_n$

   b) en déduire que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ $\frac{e^2}{n+3}\le I_n\le\frac{e^2}{n+2}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$I_{n+1}=\int_1^e x(\ln x)^{n+1}dx$$

On pose $U=(\ln(x))^{n+1}$ donc $U'=(n+1)\cdot\frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^n$

$V'=x$ donc $V=\frac{x^2}{2}$

d'où $I_{n+1}=\left[\frac{x^2}{2}(\ln(x))^{n+1}\right]_1^e-\frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln(x))^n dx$

$=\frac{e^2}{2}-0-\frac{n+1}{2}I_n$

$\Rightarrow 2I_{n+1}=e^2-n+1\,I_n$ C.Q.F.D

pour $n=1$

onc $2I_2=e^2-2I_1$

$=e^2-2\left(\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}\right)$

$I_2=\frac{e^2}{2}-\frac{2e^2}{8}-\frac{1}{8}$

Calcul intégrale

7 On considère les intégrales :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad ; \quad J=\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} \quad ; \quad K=\int_0^1 \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx \quad \text{et} \quad L=\int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx$$

1) calculer I

2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $2J=I+\frac{1}{2}$ en déduire J

3) a) Montrer que $K=-I+2J$ et déduire K

b) Poser $t=\arctan x$ et calculer K

4) En posant $t=x+2$ déterminer L

8 Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on pose $I_0=\int_1^e x\,dx$ et $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1) calculer I_1 , I_0

2) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ $2I_{n+1}=e^2-(n+1)I_n$

b) en déduire la valeur de I_2

3) a) montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ $I_{n+1}\le I_n$

b) en déduire que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ $\frac{e^2}{n+3}\le I_n\le\frac{e^2}{n+2}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

3) ⓐ soit $n\in\mathbb{N}$

On a $\forall x\in[1,e]$

$1\leqslant x\leqslant e$

$\Rightarrow 0\leqslant \ln(x)\leqslant 1$

$\Rightarrow 0\leqslant \ln^{n+1}(x)\leqslant \ln^n(x)$

$\Rightarrow 0\leqslant x\ln^{n+1}(x)\leqslant x\ln^n(x)$

$\Rightarrow \int_1^e x\ln^{n+1}(x)dx\leqslant\int_1^e x\ln^n(x)dx \quad (1<e)$

$I_{n+1}\leqslant I_n$

Astuce n° 1

On a

$2I_{n+1}\geqslant 0$

$\Leftrightarrow e^2-(n+1)I_n\geqslant 0$

$\Leftrightarrow e^2\geqslant(n+1)I_n$

$\Leftrightarrow I_n\leqslant\frac{e^2}{n+1}$

2e Meth

$I_{n+1}-I_n=\int_1^e x\ln^{n+1}(x)dx-\int_1^e x\ln^n(x)dx$

$=\int_1^e x(\ln(x))^n(\ln(x)-1)\,dx \leqslant 0$

$+ \qquad -$

7

Calcul intégrale

On considère les intégrales :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad ; \quad J=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad ; \quad K=\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx \quad \text{et} \quad L=\int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{(x^2+4x+5)^2}dx$$

1) calculer I

2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $2J=I+\frac{1}{2}$ en déduire J

3) a) Montrer que $K=-I+2J$ et déduire K

b) Poser $t=\arctan x$ et calculer K

4) En posant $t=x+2$ déterminer L

8

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on pose $I_0=\int_1^e x\,dx$ et $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1) calculer I_1 , I_0

2) a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $2I_{n+1}=e^2-(n+1)I_n$

b) en déduire la valeur de I_2

3) a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $I_{n+1}\le I_n$

b) en déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $\frac{e^2}{n+3}\le I_n\le\frac{e^2}{n+2}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Astuce ② :

On a $I_{n+1}\leqslant I_n$

$\Rightarrow 2I_{n+1}\leqslant 2I_n$

$\Rightarrow e^2-(n+1)I_n\leqslant 2I_n$

$\Rightarrow e^2\leqslant 2I_n+(n+1)I_n$

$\Rightarrow e^2\leqslant (n+3)I_n$

$\Rightarrow I_n\geqslant\frac{e^2}{n+3}$

on a $\lim\limits_{+\infty}\frac{e^2}{n+1}=\lim\limits_{+\infty}\frac{e^2}{n+3}=0$

d'où $\lim I_n=0$

de même $\lim nI_n=e^2$

Montrer que $(J, *, \perp)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (3.25 pts)

Partie I :

1 - Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + i = 0$ (a est la solution de l'équation telle que
0.5 $\text{Re}(a) > 0$)

0.5 2 - a) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $1 + a$.

0.25 b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

c) Vérifier que $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$, en déduire la forme trigonométrique du nombre
0.5 complexe $1 - a$.

Partie II : Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectifs $a, -a, z$ et z' tels que $zz' + i = 0$.

0.25 1 - Soit N le point d'affixe $\bar{z}$, conjugué de z.
Montrer que les droites (ON) et (OM') sont perpendiculaires.

0.25 2 - a) Montrer que : $z' - a = i\frac{z-a}{az}$.

0.5 b) Montrer que si $z \neq -a$, alors : $z' \neq -a$ et $\frac{z'-a}{z'+a} = -\frac{z-a}{z+a}$.

0.5 3 - On suppose que les points A, B, M sont non alignés.
Montrer que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM.

$$a + ib = |Z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

1) $Z^2 + i = 0$

$(1+i)^2 = 2i$

$(1-i)^2 = -2i$

$\iff Z^2 = -i = \frac{(1-i)^2}{2}$

$Z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ ou $Z = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $Z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\underbrace{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}_{2\cos\theta}\right)$$

$Z^2 = a^2$

$Z_1 = a$ et $Z_1 = \dots$

2) a) $1 + a = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 1 + \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 1 + e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$= e^{-i\frac{\pi}{8}}\left(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot e^{-i\frac{\pi}{8}}$

$\oplus$

d'où $|1+a| = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg(1+a) = -\frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

Montrer que $(J, *, \perp)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (3.25 pts)

Partie I :

1 - Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $\mathbf{z^2 + i = 0}$ (a est la solution de l'équation telle que
0.5 $\mathrm{Re}(\mathbf{a}) > \mathbf{0}$)

0.5 2 - a) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\mathbf{1 + a}$.

0.25 b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

c) Vérifier que $(1+a)(1-a) = 1+i$, en déduire la forme trigonométrique du nombre
0.5 complexe $1 - a$.

Partie II : Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$, on considère les points $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{M}$ et M' d'affixes respectifs $\mathbf{a}, -\mathbf{a}, \mathbf{z}$ et $\mathbf{z'}$ tels que $\mathbf{zz' + i = 0}$.

0.25 1 - Soit $\mathbf{N}$ le point d'affixe $\overline{\mathbf{z}}$, conjugué de $\mathbf{z}$.
Montrer que les droites $(\mathbf{ON})$ et (OM') sont perpendiculaires.

0.25 2 - a) Montrer que : $\mathbf{z' - a = i\frac{z-a}{az}}$.

0.5 b) Montrer que si $\mathbf{z \neq -a}$, alors : $\mathbf{z' \neq -a}$ et $\mathbf{\frac{z'-a}{z'+a} = -\frac{z-a}{z+a}}$.

0.5 3 - On suppose que les points A, B, M sont non alignés.
Montrer que le point $\mathbf{M'}$ appartient au cercle circonscrit au triangle $\mathbf{ABM}$.

c) On a $(1+a)(1-a) = 1+i$

$$\Leftrightarrow (1-a) = \frac{1+i}{1+a}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}}{2\cos(\pi/8)\,e^{-i\pi/8}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\cos\pi/8}\,e^{i\left(\pi/4 + \pi/8\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{8}\right)}$$

$[r, \theta]$
$= re^{i\theta}$

~~Montrer que $(J, *, \perp)$ est un corps commutatif.~~

Exercice 4 : (3.25 pts)

Partie I :

1 - Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $\mathbf{z^2 + i = 0}$ (a est la solution de l'équation telle que

0.5 $\mathrm{Re}(\mathbf{a}) > \mathbf{0}$)

0.5 **2 - a)** Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\mathbf{1 + a}$.

0.25 **b)** En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

c) Vérifier que $(1+a)(1-a) = 1+i$, en déduire la forme trigonométrique du nombre

0.5 complexe $1-a$.

Partie II : Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$, on considère les points $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{M}$ et M' d'affixes respectifs $\mathbf{a}, -\mathbf{a}, \mathbf{z}$ et $\mathbf{z'}$ tels que $\mathbf{zz' + i = 0}$.

0.25 **1 -** Soit $\mathbf{N}$ le point d'affixe $\overline{\mathbf{z}}$, conjugué de $\mathbf{z}$.

Montrer que les droites $(\mathbf{ON})$ et (OM') sont perpendiculaires.

0.25 **2 - a)** Montrer que : $\mathbf{z' - a = i\frac{z-a}{az}}$.

0.5 **b)** Montrer que si $\mathbf{z \neq -a}$, alors : $\mathbf{z' \neq -a}$ et $\mathbf{\frac{z'-a}{z'+a} = -\frac{z-a}{z+a}}$.

0.5 **3 -** On suppose que les points A, B, M sont non alignés.

Montrer que le point $\mathbf{M'}$ appartient au cercle circonscrit au triangle $\mathbf{ABM}$.

(b) $1+a = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 2\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)$

$\Longrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (car $\cos\frac{\pi}{8} > 0$)

(c) $(1+a)(1-a) = 1-a^2$

$= 1-(-i)$ (car $a^2 = -i$ car a sol $z^2 = -i$)

$= 1+i$

9

1) soit f la fonction définie par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

calculer la dérivée $f'(x)$ et déduire la valeur de $A=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

2) on considère les intégrales $B=\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$ et $C=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

a) en utilisant une intégration par parties exprimer B en fonction de A

b) montrer que $A+C=B$ déduire C ; B

10 déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

$$U_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{k} \quad (3) \qquad U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{n}{n^2+k^2} \quad (2) \qquad U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n^2+nk}} \quad (1)$$

$$U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n(2n-k)}} \quad (6) \qquad U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\sqrt[n]{2^k}}{n} \quad (5) \qquad U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad (4)$$

$$U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n+k} \quad (7) \qquad U_n=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{k}{n}\right)} \quad (8) \qquad U_n=\frac{1}{(n+1)^4}\sum_{k=1}^{k=n}k^3 \quad (9)$$

Domaine de définition d'une fonction définie par integral

① $F(x) = \int_x^{2x} \underbrace{\frac{1}{\ln(t)}}_{f(t)} \cdot dt$

$0 < \frac{1}{x} < 1$ $\quad \frac{1}{x} > 1$

$\downarrow$

$x > 1$ $\quad 0 < x < 1$

$D_f = \{ t \in \mathbb{R} / t > 0 \text{ et } \ln(t) \neq 0 \}$

$t > 0$ et $t \neq 1$

$=]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$\int f(x)\,dx$

$x \in D_F \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \,/\, [x, 2x] \subset]0,1[$ ou $[x, 2x] \subset]1, +\infty[$

$\Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $0 < 2x < 1$ ou $x > 1$ et $2x > 1$

$\Leftrightarrow (0 < x < 1$ et $0 < x < \frac{1}{2})$ ou $(x > 1$ et $x > \frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$ ou $x > 1$

$0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$

$D_F =]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$

$g \circ f$ $\quad f(I) \subset J$

$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \cdot dt$

1) Mq F est dérivable sur I

et calculer $F'(x)$

Soit φ une primitive de f sur D_f

$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \cdot dt$

$= [\varphi(t)]_{u(x)}^{v(x)}$

$F(x) = \varphi(v(x)) - \varphi(u(x))$

Si u et v sont dérivables sur I et f continue sur D_f

$u(I) \subset D_f$ et $v(I) \subset D_f$

Alors F est dérivable sur I

et $F'(x) = v'(x) \cdot \varphi'(v(x)) - u'(x) \cdot \varphi'(u(x))$

$F'(x) = v'(x)\, f(v(x)) - u'(x)\, f(u(x))$

Exemple $F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$

$D_F =]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$

Mq : F est dérivable sur D_F et calculer $F'(x)$

On a : $t \xrightarrow{f} \frac{1}{\ln(t)}$ est continue $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

on pose : $x \xrightarrow{U} x$ et $x \xrightarrow{V} 2x$

on a $U(D_F) \subset D_f$ et $V(D_F) \subset D_f$ ← (car F est définie sur DF)

et on a : U et V sont dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur DF

d'où F est dérivable sur DF

Soit φ une primitive de f sur Df.

Soit $x \in D_F$

d'où $F(x) = [\varphi(t)]_x^{2x} = \varphi(2x) - \varphi(x)$

d'où $F'(x) = (2x)'\varphi'(2x) - \varphi'(x)$

$= 2f(2x) - f(x)$

$$F'(x) = \frac{2}{\ln(2x)} - \frac{1}{\ln(x)}$$

$\int f(t)\,dt = \int f(x)\,dx = \int f(u)\,du$

la parité

Exemple $F(x) = \int_x^{3x} \frac{1}{1+t^4}\,dt$.

- $D_F = \mathbb{R}$ (car les fonctions $x \to x$ et $x \to 3x$ et $t \to \frac{1}{1+t^4}$ sont définies sur $\mathbb{R}$)

- Mq est impaire

$F(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{1}{1+t^4}\,dt$

On pose $U = -t$

donc $dU = -dt \Rightarrow dt = -dU$

si $t = -x \Rightarrow U = x$

$t = -3x \Rightarrow U = 3x$

d'où $F(-x) = \int_x^{3x} \frac{1}{1+(-U)^4}(-dU)$

$= -\int_x^{3x} \frac{1}{1+U^4}\,dU = -F(x)$

d'où F est impaire

0,5 pt **c)** Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 : (2 pts)

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & ; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

0,5 pt **1 -** Montrer que g est continue sur $[0;+\infty[$.

2 - Pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$; on pose : $L(x) = \int_0^x g(t)dt$

025 pt **a)** Montrer que L est continue sur $[0;+\infty[$

025 pt **b)** Calculer $L(x)$ pour $x > 0$

0,5 pt **c)** Calculer $\lim_{x\to 0^+} L(x)$ et en déduire la valeur de $L(0)$

3 - Pour tout entier naturel non nul $n \geq 1$, on pose :$S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\dfrac{p}{n}\right)$

0,5 pt Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

I)- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$

0,25 pt **b)** Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que :$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

0,5 pt **c)** Montrer que : $(\exists \alpha \in]0, 1[) \;\; f'(\alpha) = 0$

0,5 pt **d)** En déduire que : $f'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$

II) - On considère la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que : $(\forall t \in [1, +\infty[) \;\; \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

1 pt **b)** Montrer que : $(\forall t \in [1, +\infty[) \;\; F(1) - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \dfrac{1}{4}(\ln x)^2$

(On remarquera que :$F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\frac{\ln t}{t}dt$)

1 pt **c)** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que F est dérivable sur $[0; +\infty[$ puis calculer $F'(x)$

0,25 pt **b)** Étudier les variations de F sur $[0; +\infty[$

Q74 :

L'intégrale $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ **est égale à :**

A $\frac{\pi}{3}$ B $\frac{\pi}{4}$ C $\frac{\pi}{6}$ D $\frac{\pi}{8}$ E $\frac{\pi}{12}$

Q75 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ **, si** $|z_1| = |z_2| = 1$ **et** $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ **alors** $|z_1 - z_2|$ **est égal à :**

A 1 B 3 C $\sqrt{3}$ D 2 E $\sqrt{2}$

Q76 :

$(u_n)_{n\geq 0}$ **est la suite définie par :** $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ **et pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{\frac{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}{2}}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n$ **est égale à :**

A 0 B $+\infty$ C 1 D $\sqrt{2}$ E $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Examen du Baccalauréat **Session Rattrapage 2021**

Exercice 2 : (4 pts)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t - \frac{t^2}{2}} dt$

0,5 pt — **1 - a)** Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x

1 pt — **b)** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

0,5 pt — **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que :

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 (1-x)e^{x - \frac{x^2}{2}}dx$$

0,5 pt — **b)** Calculer $\int_0^1 F(x)dx$

3 - On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}}dx\right)$$

0,5 pt — **a)** Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt — **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt — **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

---

1) a) $F(x) = \int_0^x (e^{t - t^2/2}) dt$

Si : $a < b$, $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

• Si $x \geq 0$ on a $e^{t - t^2/2} \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^x e^{t - t^2/2} \geq 0$

$\Rightarrow F(x) \geq 0$

$\int_a^b = -\int_b^a$

• Si $x \leq 0$ on a $e^{t - t^2/2} \geq 0$

$\Rightarrow \int_x^0 e^{t - t^2/2} \geq 0$

$\Rightarrow -\int_0^x e^{(t - t^2/2)} \geq 0$

$\Rightarrow F(x) \leq 0$

b) la fonction $x \xrightarrow{F} \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a

donc $F' = f$

Exercice 2 : (4 pts)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x e^{t-\frac{t^2}{2}}dt$

0,5 pt **1 - a)** Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x

1 pt **b)** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que :

$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1(1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}dx$$

0,5 pt **b)** Calculer $\int_0^1 F(x)dx$

3 - On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}e^{x-\frac{x^2}{2}}dx\right)$$

0,5 pt **a)** Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

(b) ona : La fonction $t\longrightarrow e^{t-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

et F et sa primitive qui s'annule en 0

ALors F est derivable sur $\mathbb{R}$

et $(\forall x\in\mathbb{R})\quad F'(x)=f(x)=e^{x-x^2/2}$

(2) (a) $\int_0^1 F(x)\,dx$

$\int_a^x f(t)\,dt$

la primitive de f qui s'annule en a

Examen du Baccalauréat — Session Rattrapage 2021

Exercice 2 : (4 pts)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t - \frac{t^2}{2}} dt$

0,5 pt — **1 - a)** Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x

1 pt — **b)** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

0,5 pt — **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que :

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 (1-x)e^{x - \frac{x^2}{2}} dx$$

0,5 pt — **b)** Calculer $\int_0^1 F(x)dx$

3 - On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x - \frac{x^2}{2}} dx\right)$$

0,5 pt — **a)** Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt — **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}\right)$

~~0,5 pt — c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.~~

$$\int_0^1 \underbrace{1}_{v'} \times \underbrace{F(x)}_{u} dx$$

$$\begin{cases} u(x) = F(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = F'(x) \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\int_0^1 F(x)dx = [F(x)x]_0^1 - \int_0^1 F'(x)\,x\,dx$$

$$= F(1) - F(0)\times 0 - \int_0^1 x e^{x - \frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \int_0^1 e^{x - \frac{x^2}{2}} dx - \int_0^1 x e^{x - \frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(e^{x - \frac{x^2}{2}} dx - x e^{x - \frac{x^2}{2}}\right) dx$$

$$= \int_0^1 e^{x - \frac{x^2}{2}} (1-x)\, dx$$

Examen du Baccalauréat — Session Rattrapage 2021

Exercice 2 : (4 pts)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t - \frac{t^2}{2}} dt$

0,5 pt **1 - a)** Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x

1 pt **b)** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que :

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 (1-x)e^{x - \frac{x^2}{2}} dx$$

0,5 pt **b)** Calculer $\int_0^1 F(x)dx$

3 - On considère la suite $(u_n)_{n\geq1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left((n-k) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x - \frac{x^2}{2}} dx \right)$$

0,5 pt **a)** Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq1}$ est convergente et déterminer sa limite.

(b) $\int_0^1 F(x) = \int_0^1 (1-x) \, e^{x - x^2/2} dx$

$\int \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \int f(x) + \beta \int g(x)$

$= \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)' e^{x - x^2/2} dx$

$= \left[e^{x - x^2/2} \right]_0^1$

$= e^{1/2} - e^0 = \sqrt{e} - 1$

$\ln \left(\sum \right) = \int$

3) $U_n = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} (n-K) \int_{\frac{K}{n}}^{\frac{K+1}{n}} e^{x - x^2/2} dx$

$\int = S =$ Somme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a $U_n = \frac{1}{n} \sum \left((n-k) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x - \frac{x^2}{2}} dx \right)$

on a F est une primitive de $x \to e^{x - x^2/2}$

d'où $U_n = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} (n-k) \left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \right)$

$= U_n = \frac{1}{n} \sum (n-k) F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{0} (n-k) F\left(\frac{k}{n}\right)$

Exercice 1 : (10 points)

Partie A :

0.25 pt **1 -** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, 1 + x \leq e^x$

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, 0 \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \dfrac{x^3}{6}$

0.5 pt **c)** Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[\;;\quad f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$

Et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 pt **b)** Vérifier que : $(\forall x > 0)\,;\, \dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{1 - 2x - e^{-2x}}{x^2} - \dfrac{1 - x - e^{-x}}{x^2}$

0.5 pt **c)** En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que la nombre dérivé à droite en 0 est $-\dfrac{3}{2}$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0)\,;\, f'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x + 1 - e^x(1 + x)\right)$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0)\,;\, f'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x + 1 - e^x(1+x)\right)$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0)\,;\, f'(x) \leq -e^{-2x}$ (On pourra utiliser : $1 + x \leq e^x$)

0.25 pt **c)** En déduire le sens de variations de f sur I

3 - On admet que : $(\forall x > 0)\,;\, f''(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}\left(-4x^2 - 4x - 2 + e^x(2 + 2x + x^2)\right)$

0.25 pt **a)** Montrer que : $(\forall x \geq 0)\,;\, 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leq e^x$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x > 0)\,;\, f''(x) > 0$

4 - On admet que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\dfrac{3}{2}$

0.5 pt **a)** Montrer $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x \in I)\,;\, \left|f'(x)\right| \leq \dfrac{3}{2}$

0.5 pt **5 - a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de f

0.25 pt **c)** Déterminer la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à sa demi-tangente au point $T(0,1)$

0.5 pt **d)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$

Partie C :

1 - Pour tout x de $[0,1]$, on pose , $g(x) = f(x) - x$

0.5 pt **a)** Montrer que g est une bijection de $[0,1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

0.5 pt **b)** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0,1\right[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

2 - Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on considère les nombres réels $x_k = \dfrac{k\alpha}{n}$ et on pose , $I_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$ et $J_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt$

0.5 pt **a)** Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$; $|J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t - x_k)dt$

0.5 pt **b)** En déduire que : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$; $|J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2$

3 - On pose : $L = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)dt$

0.5 pt **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) - L\right| \leq \dfrac{3}{4}\dfrac{\alpha^2}{n}$

0.5 pt **b)** En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) = \int_0^{\alpha} f(t)dt$

Composante 4 : MATHEMATIQUES (Coefficient :1)

Q61 :

Si z est le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$, alors z^8 est égal à :

A $8+i8\sqrt{3}$ B $-8+i8\sqrt{3}$ C $-8-i8\sqrt{3}$
D $8-i8\sqrt{3}$ E $4+i4\sqrt{3}$

Q62 :

Si θ est un nombre réel, alors $cos^3\theta$ est égal à :

A $\frac{1}{8}(cos3\theta+3cos\theta)$ B $\frac{1}{4}(cos3\theta+3cos\theta)$ C $\frac{1}{4}(sin3\theta+3sin\theta)$
D $\frac{1}{8}(3cos\theta-cos3\theta)$ E $\frac{1}{8}(sin3\theta+3sin\theta)$

Q63 :

Q66 :

Si z est un nombre complexe tel que :

$arg(z-1)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $arg(z+1)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ +

alors z est égal à :

$\boxed{A}$ $\sqrt{3}i$ $\boxed{B}$ $2\sqrt{3}i$ $\boxed{C}$ $-\sqrt{3}i$ $\boxed{D}$ $-2\sqrt{3}i$ $\boxed{E}$ $1+\sqrt{3}i$

Q67 :

Si $z=1+ie^{i\frac{\theta}{2}}$ où $\theta\in]-\pi,\pi[$ alors $|z|$ est égal à :

$\boxed{A}$ 2 $\boxed{B}$ $2cos\frac{\theta}{2}$ $\boxed{C}$ $2cos\frac{\theta+\pi}{4}$ $\boxed{D}$ $cos\frac{\theta+\pi}{4}$ $\boxed{E}$ $2sin\frac{\theta}{4}$

Q68 :