Exercice 01 (Examen 2024-Session-Normal)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points

A et B d'affixes respectives $a=\sqrt{3}(1-i)$ et $b=2+\sqrt{3}+i$

1) Vérifier que $|a|=\sqrt{6}$ et que $\arg(a)\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$

2) a) Montrer que $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$ puis vérifier que $\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) En déduire une forme trigonométrique du complexe b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel.

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'. On pose $R(B)=B'$, $R(A)=A'$ et $R(A')=A''$

a) Vérifier que $z'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$ et que $\arg(a')\equiv\frac{-\pi}{12}[2\pi]$ où a' est l'affixe du point A'

b) Montrer que l'affixe du point A'' est $a''=\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O, A'' et B sont alignés.

c) Montrer que b', l'affixe du point B', vérifie $b'=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$

d) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O

Exercice 02 (Examen 2024-Session-Rattrapage)

I) On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 4z + 9 = 0$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (2i\sqrt{5})^2$

2) Résoudre l'équation (E)

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + i\sqrt{5}$, $b = 2 - i\sqrt{5}$ et $c = 2 - \sqrt{5}$.

1)a) Vérifier que $|a| = 3$

b) Montrer que le triangle OAB est isocèle.

2) a) Vérifier que $\frac{a-c}{b-c} = i$

b) Déduire la nature du triangle ABC

3) a) Déterminer l'affixe du point D image de B par la translation de vecteur $\overline{CA}$

b) Montrer que $ADBC$ est un carré

4) On pose $x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n$ et $y_n = \frac{1}{1-x_n}$, avec n un entier naturel non nul.

a) Vérifier que $x_n\overline{x_n} = 1$

b) Montrer que $y_n + \overline{y_n} = 1$ puis déduire la partie réelle de y_n

Exercice 03 (Examen 2023-Session-Normal)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, A, B, C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $b = 1 + \sqrt{2} + i$; $c = \overline{b}$ et $d = 2i$

1) Ecrire le nombre a sous forme trigonométrique

2) a) Vérifier que $b - d = c$

   b) Montrer que $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$ et déduire que les points A , B et D sont alignés

3) a) Vérifier que $ac = 2b$

   b) En déduire que $2arg(b) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'

   a) Montrer que $z' = \frac{1}{2} az$

   b) En déduire que $R(C) = B$ et que $R(A) = D$

Montrer que $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) a$, puis déduire une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$

Exercice 04 (Examen 2023-Session-Rattrapage)

1) On considère le nombre complexe $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

a) Montrer que $a = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b) En déduire que a^{2022} est un nombre réel

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère A et B d'affixes respectives a et $\overline{a}$

Déterminer une mesure de l'angle de rotation R de centre O qui transforme B en A

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$ avec α est un nombre réel non nul

On suppose que l'équation (E) admet deux racines conjuguées non réelles z et $\overline{z}$

Soient les points $M(z)$; $N(\overline{z})$ et $P(\sqrt{3})$ du plan complexe

Sans résoudre l'équation (E)

a) Vérifier que $\alpha > \frac{3}{4}$ et que $\alpha = z\overline{z}$

b) Montrer que $|z| = |z - \sqrt{3}|$

c) En déduire que les points M et N appartient à la médiatrice (Δ) du segment $[OP]$

Déterminer la valeur de α pour laquelle $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et déduire dans ce cas les points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle

Exercice 05 (Examen 2022-Session-Normal)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

1. Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$

2. On considère la rotation R de centre D et d'angle $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$

3. a. Ecrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique.

   b. En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

4. Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

   a. Vérifier que : $|z + 2| = 2$

   b. Prouver que $z + \overline{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$)

   c. En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera