Exercice 6

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x} & ; \ x < 1 \\ f(x) = \dfrac{-2x + k}{\sqrt{x^2 + 2} + 1} & ; \ x \geq 1 \end{cases}$$

a) calculer les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) calculer la limite $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

c) calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ puis déduire b

pour que f admette une limite en $a = 1$

Exercice 7

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(ax+1)^2 - 1}{x}$

b) montrer par récurrence que

$$\lim_{x \to 0} \frac{(ax+1)^n - 1}{x} = na \ , \ a \in \mathbb{R}^*$$

c) en déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(11x+1)^{157} + (3x-1)^{97}}{x}$

Exercice 3

Soient $a > 0$ et $b \neq 0$

On considère la fonction $f(x) = \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$

a) Montrer que

$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad / \quad \frac{b}{a} - \frac{x}{a} < f(x) \leq \frac{b}{a}$

b) encadre $f(x)$ pour $x < 0$

c) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^{*}) \quad \left| f(x) - \frac{b}{a} \right| \leq \frac{|x|}{a}$

puis calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Exercice 9

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\sin x}}{x^2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{15-2x}} \quad , \quad \lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\sqrt{\cos x}}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{4-x}}{x-1} \quad , \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}-2}{\sqrt{x-1}-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-\sqrt{x}+1}-\sqrt{x-1} \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} xE\left(\frac{4}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(1-x^2)\sqrt{x^2+2}+2}{x^2-2} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{E\left(\sqrt{x}\right)}{x+1}$$

Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}E(x)=1 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} x^2E\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

Les limites

Exercice 8

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x + E(x)}{x}$

a) montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

b) calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

c) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$ $|f(x) - 1| \leq \dfrac{2}{x}$

en déduire la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Exercice 11

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x - E(x)}{\sqrt{x}} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

1) montrer que $(\forall x < 0) \quad 1 \leq xE\left(\dfrac{1}{x}\right) < 1 - x$

en déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

2) f admet-elle un limite en $a = 0$?

Exercice 13

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$$

1) vérifier que

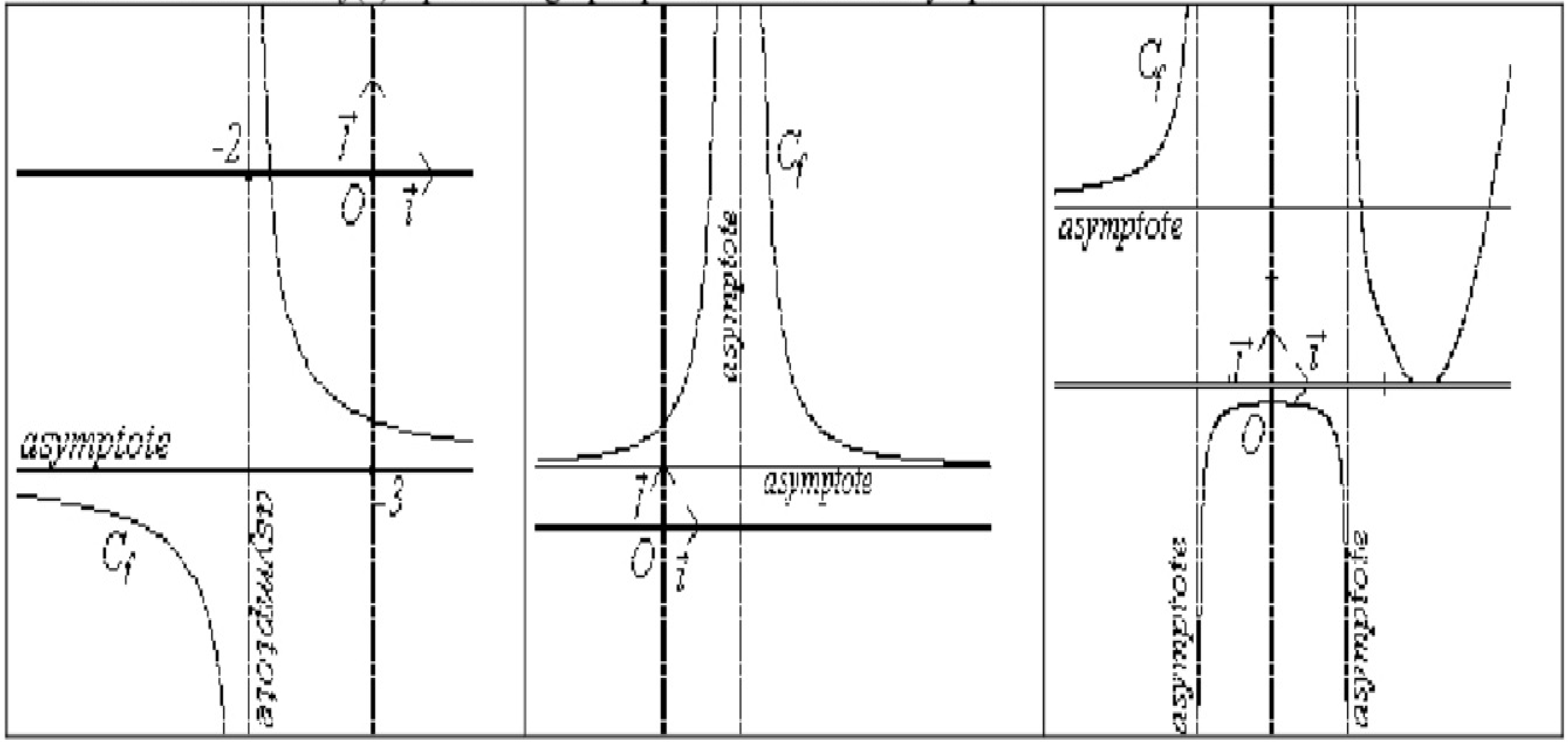
$$\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

Et calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$

2) en déduire que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=7$

<u>Exercice n°19.</u>

Retrouver les limites de $f(x)$ à partir du graphique connaissant les asymptotes



Exercice (3)

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{2x+3}{x^2-1}$	$\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} \dfrac{4x-3}{2x-1}$	$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}} \dfrac{2x+1}{x^2-9}$
$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{x(x+3)}{(x-1)(x+2)}$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{x^2}\right)$	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{2x^2-x+3}{x^2-x}$
$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-2x}$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x^2}$	$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{\sqrt{x-3}+x^2-9}{x-3}$

Exercice (4)

Calculer les limites

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2\sin x}{2\tan 3x-x}$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x-\sin 2x}{x+\tan 3x}$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{x\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x+\cos 3x-2}{x^2}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3-2\cos x}{x^2+1}$
$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x-3\sin x}{2\cos 3x-5x}$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+x-2}$
$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+3x+2}$	$\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{3x^2-5x+2}{9x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^4+3x+1}{x^3+2x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x-2}-1}{\sqrt{x}-1}$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x^2-16}$
$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5\sqrt{x}-x\sqrt{5}}{x\sqrt{x}-5\sqrt{5}}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3x-2}+1}{x-\sqrt{x-1}-1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{x-3\sqrt{x}+2}$

Exercice (2)

Calculer les limites ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to +\infty} 3x^2-5x+2$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{2}x^3-4x^2+9$; $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+1)^2-5x^2+3$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-x-3}{(x-1)}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{(x-2)^2}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-2x}{x^2-2x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{2x^2-x-1}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-2x}{x+1}-2x$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x+1}+2x$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{2-x}-x$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{2x-1}-x$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x+1}+2x$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+1}+x$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x}-x$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\sqrt{x}-3}{3\sqrt{x}+2}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x}+2}$

Limites remarquables :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tnx}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}=a$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tn(ax)}{x}=a$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}=\dfrac{a^2}{2}$