prof DEBOURI M HAMED

# Devoir Surveillé 1

Niveau:2BacSP

## Exercice I :

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}\left(2 - e^{2x}\right) - x$ et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (Unité : 2 cm )

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
2) a) Démontrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe $(C)$ au voisinage de $-\infty$.
   b) Résoudre l'équation $2 - e^{2x} = 0$, puis montrer que la courbe $(C)$ est au-dessus de $(\Delta)$ sur l'intervalle $\left]-\infty, \frac{\ln 2}{2}\right]$ et en dessous de $(\Delta)$ sur l'intervalle $\left[\frac{\ln 2}{2}, +\infty\right[$.
3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.
4) a) Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -\left(2e^{2x} - 1\right)^2$
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
5) Montrer que $A\left(-\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{4}\right)$ est un point d' inflexion de $(C)$.
6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ telle que $0 < \alpha < \frac{\ln 2}{2}$
7) Construire $(\Delta)$ et $(C)$ dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$ ci-dessus (On prendra $-\frac{\ln 2}{2} \approx -0,35$ et $\frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} \approx 1,1$ )
8) a) Montrer que la fonction $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction $f^{-1}$ (Remarquer que la droite $(\Delta)$ est perpendiculaire à la première bissectrice $y = x$ )
   c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$ (Remarquer que $f^{-1}(1) = 0$ )

## Exercice II :

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation : $(E) : z^2-6(1-\sqrt{3})z+72=0$
   a) Vérifier que le discriminant de l'équation $(E)$ est $\Delta = -36(\sqrt{3}+1)^2$
   b) En déduire les solutions de l'équation $(E)$.
2) Soient les nombres complexes $a = 3(1-\sqrt{3}) - i3(\sqrt{3}+1), b = -\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ et $c = -\sqrt{3}-3i$
   a) Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 12b$
   b) Écrire les nombres complexes $b$ et $c$ sous forme exponentielle.
   c) En déduire que $a = 6\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$
3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $B, C$ et $D$ d'affixes respectives $b, c$ et $d$ telle que $D$ est l'image de $B$ par l'homothétie $h$ de centre $O$ et du rapport $\sqrt{2}$. Soit $z$ l'affixe d'un point $M$ du plan et $z'$ l'affixe de $M'$ image de $M$ par la rotation $R$ de centre $O$ et d'angle $\frac{-7\pi}{12}$
   a) Déterminer $d$ l'affixe de $D$
   b) Vérifier que $z' = \frac{\sqrt{2}}{12}az$
   c) Déterminer l'image du point $C$ par la rotation $R$
   d) Déterminer la nature du triangle $ODC$.

## EXERCICE 2 $(3,5\,pts)$

0,5pt 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$

2) on considère dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points :

$A, B, C$ d'affixes respectivement : $a = 2\sqrt{3}$ , $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = \overline{b}$

0,5pt a) Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe $b$

0,5pt b) Déduire que : $a^6 + b^6 = 0$

0,5pt c) Déterminer $a'$ l'affixe du point $A'$ image du point $A$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

1pt d) Déduire que : $\arg(a'c) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$ et que $|a'c| = 12$ puis déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

0,5pt e) Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant :

$$\frac{z-c}{z-b} \in \mathbb{R}$$

**02.** On considère le polynome suivant : $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$ dont z est un complexe .

a. Calculer : $P(-1)$ .

b. Déterminer a et b de $\mathbb{R}$ tel que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a : $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$ .

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $P(z)=0$.

**03.** Dans le plan complexe $(P)$ rapporté a un repére orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$ ; unité de mesure est 2 cm .

a. Donner le module et l'argument le nombre complexe suivant : $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b. Donner la forme algébrique de $z^6$ .

c. On considère les points A et B et C d'affixes respectivement $a=-1$ et $b=2+i\sqrt{3}$ et $c=2-i\sqrt{3}$. Calculer la distance AB .

d. Donner la forme trigonométrique puis la forme exponentielle du nombre complexe : $\frac{b-a}{c-a}$.

e. On déduit la nature du triangle ABC .

**04.** On considère la rotation R de centre le point A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ .

a. Graphiquement déterminer l'image du point C par la rotation R .

b. Prouver ce résultat en utilisant les quetions précédentes .

c. Donner l'écriture complexe de la rotation R ; puis vérifie une autre fois de l'image de C par R .

d. Verifier que $c = -2+9i$ et $d = 1+2i$ les affixes des points C et D tel que : $R(A) = C$ et $R(B) = D$.

e. Montrer que : $(AD) \perp (BC)$ et $AD = BC$.