

EXERCICE2 : (3.5 points)

0.25 1-a) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

0.5 b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

0.25 2- Montrer que : $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \leq 1$

0.5 3-a) Montrer que : $(\forall x \in [0,1]) \quad ; \quad 0 \leq e^x - 1 \leq ex$

0.25 b) En déduire que : $(\forall x \in [0,1]) \quad ; \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2} x^2$

4- Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(e^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1 \right)$

0.25 a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n^2+k^2} \right)^2$

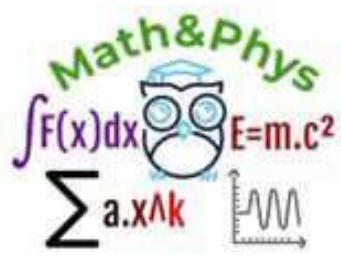
0.25 b) Montrer que la fonction : $x \mapsto (1+x^2)^{-2}$ est strictement décroissante sur $[0,1]$

0.25 c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\frac{1}{n} \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2} dx$$

0.5 5-a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}$

0.5 b) En déduire que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.



Exercice 2 : (4,00 points)

Partie I:

On considère dans l'ensemble \mathbb{C} , l'équation définie par :

$$(E_\theta) : z^2 - 2 \left(i + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right) z + 2i \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ où } \theta \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right].$$

0.50 1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation (E_θ) .

0.50 2. Ecrire les solutions de (E_θ) sous la forme exponentielle

Partie II:

Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) ,

Σ

Examen Nationale Blanc N° 4 Baccalauréat 2021 Science mathématiques (A) et (B) Ville ZAIO

EB_21

Page
3 / 5

on considère : A , B , M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 2i$,

$$z_1 = i + e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \text{ et } z_2 = i + e^{-i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}, \text{ où } \theta \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right].$$

0.25 1. Montrer que M_2 est l'image de M_1 par la translation de vecteur :

$$\vec{w}(-2i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)).$$

0.75 2. a. Déterminer et construire l'ensemble :

$$\Gamma = \left\{ M(z) \in (P); \arg\left(\frac{z-2i}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$$

0.75 b. Montrer que lorsque θ varie sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$, chacun des points M_1 et M_2 varie sur l'ensemble Γ .

0.75 c. On suppose que : $\theta \in I = \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ et soit G le centre de gravité du triangle AM_1M_2 .

Déterminer l'ensemble des points G lorsque θ varie dans I .

0.50 3. Soit M le point d'affixe m , tels que $m \in \mathbb{C} - \{0, 2i\}$ et $\theta \in I$.

Déterminer l'ensemble des points M pour qu'ils soient appartenir au cercle circonscrit au triangle OBM_1 .