EXERCICE2 : (3.5 points)

0.25 1-a) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

0.5 b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

0.25 2- Montrer que : $\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \leq 1$

0.5 3-a) Montrer que : $\left(\forall x \in [0,1]\right)$; $0 \leq e^x - 1 \leq e.x$

0.25 b) En déduire que : $\left(\forall x \in [0,1]\right)$; $0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2}x^2$

4- Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $w_n = \sum_{k=1}^{k=n}\left(e^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1\right)$

0.25 a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$

0.25 b) Montrer que la fonction : $x \mapsto \left(1+x^2\right)^{-2}$ est strictement décroissante sur $[0,1]$

0.25 c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \in \{1,2,......,n\}$, on a :

$$\frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(1+x^2\right)^{-2}\,dx$$

0.5 5-a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}$

0.5 b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 : (4,00 points)

Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$(E_\theta): z^2-2\left(i+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)z+2i\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{ où } \theta\in\left]-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[.$$

0.50 **1.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

0.50 **2.** Ecrire les solutions de (E_θ) sous la forme exponentielle

Partie II:

Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

on considère : A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_A=i$, $z_B=2i$,

$z_1=i+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ et $z_2=i+e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$, où $\theta\in\left]-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$.

0.25 **1.** Montrer que M_2 est l'image de M_1 par la translation de vecteur :

$$\vec{w}\left(-2i\sin\left(\theta+\pi/4\right)\right).$$

0.75 **2. a.** Déterminer et construire l'ensemble :

$$\Gamma=\left\{M(z)\in(P);\ \arg\left(\frac{z-2i}{z}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$$

0.75 **b.** Montrer que lorsque θ varie sur l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$, chacun des points M_1 et M_2 varies sur l'ensemble Γ.

0.75 **c.** On suppose que : $\theta\in I=\left]-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ et soit G le centre de gravité du triangle AM_1M_2.

Déterminer l'ensemble des points G lorsque θ varie dans I.

0.50 **3.** Soit M le point d'affixe m, tels que $m\in\mathbb{C}-\{0,2i\}$ et $\theta\in I$.

Déterminer l'ensemble des points M pour qu'ils soient appartient au cercle circonscrit au triangle OBM_1.