

Exercice 2 : (11 points)

Partie 1 : On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln(x)$$

- 1 pt 1 - Montrer que $g'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)$.
- 1 pt 2 - En déduire g est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.
- 0.25 pt 3 - a) Calculer $g(1)$.
- 0.25 pt b) Dresser le tableau de variations de g . (Le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé)
- 0.5 pt c) En déduire que $g(x) \geq 3$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

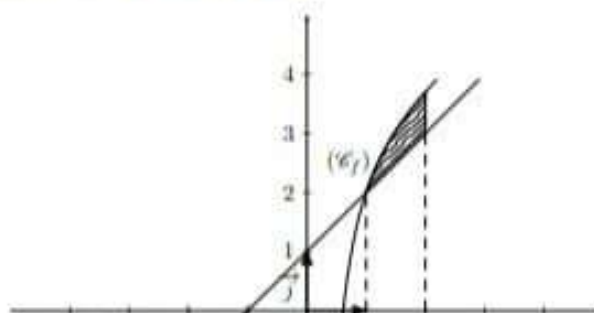
Partie 2 : On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{2 \ln(x)}{x}$$

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 pt 1 - Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.
- 0.5 pt 2 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 0.5 pt b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1))$.
- 0.25 pt c) Donner une interprétation géométrique du résultat.

- 1 pt 3 - a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
- 0.5 pt b) Déduire que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- 0.5 pt c) Dresser le tableau de variations de f .
- 1 pt 4 - a) Montrer que $f''(x) = \frac{2}{x^3} (-3 + 2 \ln(x))$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
- 1 pt b) En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse $e\sqrt{e}$.
- 5 - Dans la figure ci-dessous $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x + 1$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1 pt a) Montrer que : $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln(2))^2$
- 0.75 pt b) En déduire l'aire de la partie hachurée.



Problème : (9 pts)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = 2x \ln x - 2x ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

0,5 pt

1 - Montrer que f est continue à droite au point 0.

0,5 pt

2 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0,5 pt

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat.

0,75 pt

3 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

0,5 pt

b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

0,5 pt

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$

0,5 pt

4 - a) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.

1 pt

b) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $e^{\frac{1}{2}} \simeq 4,5$)

Exercice 2 : (11 points)

Partie 1

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = x^2 - \ln(x)$$

- 0,5 pt 1 - Montrer que $h'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
- 0,5 pt 2 - Étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 1 pt 3 - Vérifier que $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1 + \ln(2)}{2}$, et dresser le tableau de variation de h (Le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé).
- 0,5 pt 4 - En déduire que : $h(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

Partie 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

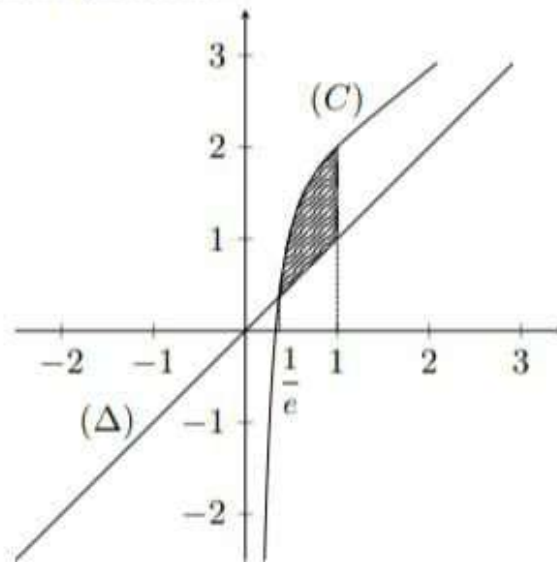
$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x} + x \text{ et soit } (C) \text{ sa courbe représentative dans un repère orthonormé } (O; \vec{i}, \vec{j}).$$

- 0,5 pt 1 - a) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.
- 0,25 pt b) Donner une interprétation géométrique du résultat.
- 0,5 pt 2 - a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 0,5 pt b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.
- 0,25 pt c) Déduire de ce qui précède une interprétation géométrique du résultat.

Examen du Baccalauréat

Session normal 2022

- 1pt 3 - a) Montrer que $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
- 1 pt b) Déduire de la question 4. de la partie 1 que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- 4 - Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.
- 0,5 pt a) Calculer $f\left(\frac{1}{e}\right)$.
- 1 pt b) Étudier le signe de $f(x) - x$.
- 0,5 pt c) En déduire la position relative de (C) par rapport à (Δ) sur chacun des intervalles $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ et $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.
- 5 - Dans la figure ci dessous (C) est la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1,5 pt a) Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx$ et calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x)}{x} dx$.
- 1 pt b) En déduire l'aire de la partie hachurée.



Exercice 2 : (5.5 pts)

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln(x) - x \ln(x)$$

- 1 pt 1 - a) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$.
- 1 pt b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- 0.5 pt 2 - a) Vérifier que $g(e) = -e$.
- b) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$; $g(x) + x = (x + 1)(1 - \ln(x))$, puis résoudre l'équation $g(x) = -x$.
- 2 pts 3 - Ci dessous voici le tableau de variation de g :

x	0	1	e	$+\infty$
$g'(x)$			-	
$g(x)$		1	$-e$	

- 1 pt Donner , à l'aide du tableau de variations de g , l'image de l'intervalle $[1; e]$ par g .

Exercice 3 : (4 pts)

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci dessous, (Δ) est la droite d'équation $y = x - 1$ et $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

- 1 pt 1 - Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.
- 1,5 pts 2 - Justifier par le calcul que la droite (Δ) est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
- 3 - Ci dessous, $(\mathcal{C}_f)$ est la représentation graphique de f :
- 0,5 pts a) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = 0$
- 1 pt b) Donner graphiquement le signe de $f(x) - (x - 1)$ sur $]0; 1]$ puis sur $[1; +\infty[$.

