

Exercice 1 : (4,00 points)

0.50 pt

1 - Déterminer (S) l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $|z - 1|^2 + \bar{z} - 1 = 0$

2 - Pour tout complexe z de $\mathbb{C} \setminus (S)$, on pose : $f(z) = \frac{iz^2}{|z - 1|^2 + \bar{z} - 1}$

0.50 pt

a) Montrer que : $f(z) = \frac{iz}{\bar{z} - 1}$

0.25 pt

b) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $f\left(\frac{1}{2} + iy\right)$ tel que : $y \in \mathbb{R}$.

3 - On considère le plan complexe $(\mathcal{P})$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Et soient les points $A(1)$, $B(-i)$, $M(z)$ et $M'(z')$ avec : $z' = f(z)$

0.50 pt

a) Montrer que M appartient à la médiatrice du segment $[OA] \Leftrightarrow M' = B$

0.75 pt

b) Montrer que $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM'}\right) [2\pi]$, et déduire $(\mathcal{D})$ l'ensemble des points $M(z)$ avec lesquels : O, M et M' sont alignés.

4 - On pose : $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$

0.50 pt

5 - a) Déterminer en fonction de θ la forme trigonométrique du nombre complexe $f(z)$.

1.00 pt

b) Déterminer et tracer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $OM = 1$ et M' appartient à la droite $(\Delta) : u = x$.

0,75
0,75

1) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

a) Déterminer les solutions z_1 et z_2 de (E) tel que: $\text{Im}(z_1) > 0$.

b) Ecrire chacune des solutions de (E) sous forme trigonométrique.

0,75

2) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives: $a = 2$, $b = z_1$ et $c = z_2$.

✓ Vérifier que A, B et C appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon $r = 2$.

0,75
0,75

3) On désigne par I le milieu du segment $[AB]$.

a) Déterminer z_I l'affixe du point I, puis calculer $|z_I|$.

b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, puis déduire que:

0,5
0,75

$\arg(z_1) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$. Puis calculer: $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

4) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. On pose: $D = R(A)$.

a) Montrer que l'affixe de D est: $d = -2 - 2\sqrt{2}$.

b) Prouver que la quadrilatère ABCD est un losange.

○ Exercice n°02: (02pts)

$$(E): Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4 = 0$$

$$\text{on a } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 8 - 16 = -8 < 0$$

dou

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}{2}$$

$$Z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$\text{et } Z_2 = \bar{Z}_1 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

(car les coefficients)

$$b) Z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$\text{on a } |Z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\text{d'où } Z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$Z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

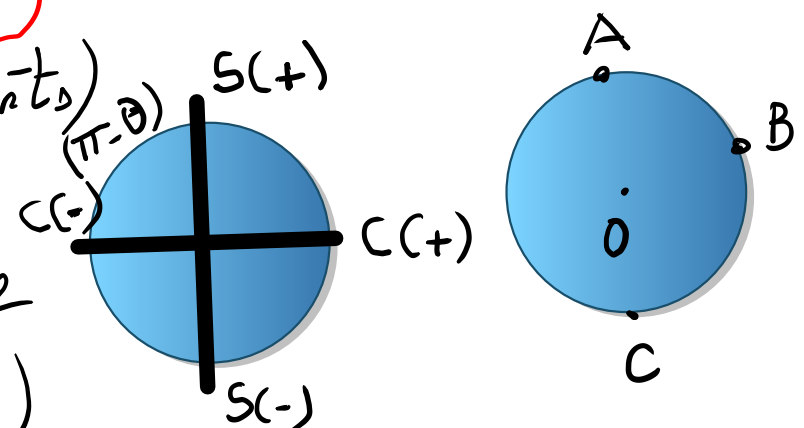
$$Z = |Z|(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{F. trig}$$

$$Z = |Z|e^{i\theta} \quad \text{F. exp}$$

$$= [|Z|, \theta] \quad \text{F. réduite}$$

$$\text{et } Z_2 = \bar{Z}_1$$

$$Z_2 = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$



$$OA = |a| = 2$$

$$OB = |z_1| = 2$$

$$OC = |z_2| = 2$$

d'où Les points A, B, C
appartient au

0,75
0,75

1) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

a) Déterminer les solutions z_1 et z_2 de (E) tel que: $\text{Im}(z_1) > 0$.

b) Ecrire chacune des solutions de (E) sous forme trigonométrique.

2) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives: $a = 2$, $b = z_1$ et $c = z_2$.

✓ Vérifier que A, B et C appartiennent au cercle (Γ) de centre O et de rayon $r = 2$.

3) On désigne par I le milieu du segment $[AB]$.

a) Déterminer z_I l'affixe du point I, puis calculer $|z_I|$.

b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, puis déduire que:

$\arg(z_1) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$. Puis calculer: $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

4) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. On pose: $D = R(A)$.

a) Montrer que l'affixe de D est: $d = -2 - 2\sqrt{2}$.

b) Prouver que la quadrilatère ABCD est un losange.

0,5
0,75

○ Exercice n°02: (02pts)

3) a) I milieu de $[AB]$
donc $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$

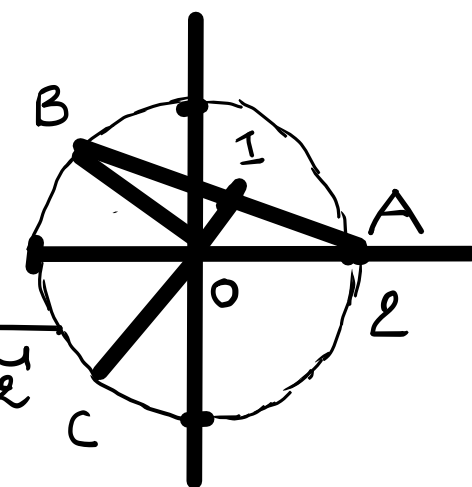
$$= \frac{2 + (-\sqrt{2}) + i\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|Z_I| = \sqrt{\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$



d'o $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \arg(b) - \arg(a)$

$$\equiv \frac{3\pi}{4} - 0 [2\pi]$$

d'o $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

b) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) [2\pi]$ $\arg(z_I) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) [2\pi]$

$$\equiv \arg\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$$

$$\arg Z_I \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{4} \right) [2\pi]$$

$$\arg Z_I \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$$

0,75
0,75

1) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

a) Déterminer les solutions z_1 et z_2 de (E) tel que: $\text{Im}(z_1) > 0$.

b) Ecrire chacune des solutions de (E) sous forme trigonométrique.

2) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives: $a = 2$, $b = z_1$ et $c = z_2$.

✓ Vérifier que A, B et C appartiennent au cercle (Γ) de centre O et de rayon $r = 2$.

3) On désigne par I le milieu du segment [AB].

a) Déterminer z_1 , l'affixe du point I, puis calculer $|z_1|$.

b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, puis déduire que:

$\arg(z_1) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$. Puis calculer: $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

4) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. On pose: $D = R(A)$.

a) Montrer que l'affixe de D est: $d = -2 - 2\sqrt{2}$.

b) Prouver que la quadrilatère ABCD est un losange.

0,75
0,75

0,5
0,75

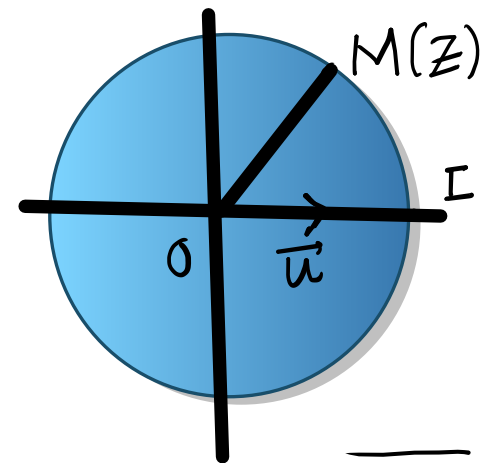
○ Exercice n°02: (02pts)

$$Z_I = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

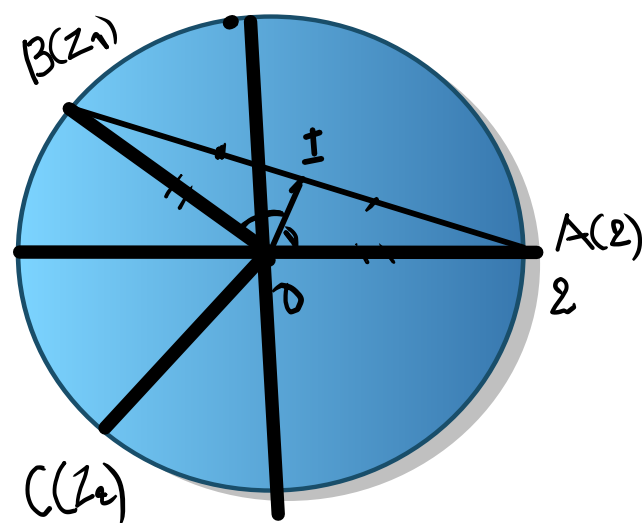
$$\Rightarrow \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\text{Re}(Z_I)}{|Z_I|} = \frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \dots$$

$$\sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\text{Im}(Z_I)}{|Z_I|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$



$$\arg Z \equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$$

$$|Z| = OM$$



$$\arg Z_I \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) [2\pi]$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

$$\arg Z_I \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$$

Rana ELORCH
Maryam
Youssef Mouda

$$Z_I = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot e^{i \frac{3\pi}{8}}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\text{Re}(Z_I)}{|Z_I|}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\text{Im}(Z_I)}{|Z_I|}$$

$$4) R\left(C, \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$R(M) = M'$$

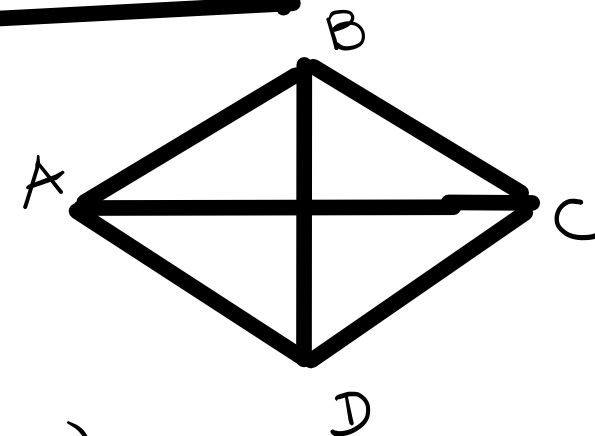
$$\Leftrightarrow Z' - Z_0 = e^{i\alpha}(Z - Z_0)$$

$$R(A) = D \Leftrightarrow d - c = e^{i\frac{3\pi}{4}}(a - c)$$

$$\Leftrightarrow d = e^{i\frac{3\pi}{4}}(a - c) + c$$

$$= \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)(2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}) - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$d = -2 - 2\sqrt{2}$$



⑥

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\{Z_B - Z_A = Z_C - Z_D\} \text{ (à vérifier)}$$

$$AB = AD$$

$$|Z_B - Z_A| = |Z_D - Z_A|$$

1) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

a) Déterminer les solutions z_1 et z_2 de (E) tel que: $\text{Im}(z_1) > 0$.

b) Ecrire chacune des solutions de (E) sous forme trigonométrique.

2) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives: $a = 2$, $b = z_1$ et $c = z_2$.

✓ Vérifier que A, B et C appartiennent au cercle (Γ) de centre O et de rayon $r = 2$.

3) On désigne par I le milieu du segment $[AB]$.

a) Déterminer z_1 , l'affixe du point I, puis calculer $|z_1|$.

b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, puis déduire que:

$$\arg(z_1) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]. \text{ Puis calculer: } \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right).$$

4) Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. On pose: $D = R(A)$.

a) Montrer que l'affixe de D est: $d = -2 - 2\sqrt{2}$.

b) Prouver que la quadrilatère ABCD est un losange.

○ Exercice n°02: (02pts)

EXERCICE: Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On considère les fonctions u et f définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x + x + 1$ et $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

1-a- Montrer que la fonction u est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

b- En déduire que l'équation $u(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α

c- Donner le tableau de signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$

2-a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b- Montrer que la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

c- Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote $\Delta: y = x$

d- Vérifier que $f(\alpha) = \alpha + 1$

3- A l'aide d'une intégration par parties ; calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} \left(\frac{f(x)}{e^x + 1} \right) dx$

4-a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{e^x \cdot u(x)}{(e^x + 1)^2}$

b- Dresser le tableau de variations de f

5- On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'asymptote $\Delta: y = x$ et les droites $x = 0$ et $x = 1$

a- Vérifier que $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} \cdot dx$

b- Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $e^x \geq x + 1$; montrer que : $\int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} \cdot dx \leq 1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{x + 2} \cdot dx$

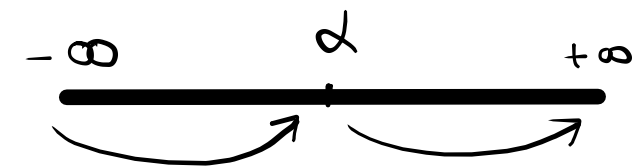
c- En déduire que $\frac{1}{2(e+1)} \leq \mathcal{A} \leq 1 + \ln\left(\frac{4}{9}\right)$

1) u admet une fonction réciproque.

on a u est continue sur $\mathbb{R}$

$f(x) = 0$ admet

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad u'(x) = (e^x)' + (x)' + 1 = e^x + 1 > 0$$



d'où u est str. croissante sur $\mathbb{R}$ si $x \in]-\infty, \alpha]$

d'où u admet une fonction réciproque définie sur $J = u(\mathbb{R})$

$x \leq \alpha$

et on a u est str.

croissante
 $u(x) \leq u(\alpha)$
 $u(x) \leq 0$

$$=] \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) [=] -\infty, +\infty [= \mathbb{R}$$

on a : u est continue et strictement croissante

et $0 \in u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

ALors $\exists ! \alpha \in \mathbb{R} \text{ tq } u(\alpha) = 0$


EXERCICE:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On considère les fonctions u et f définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x + x + 1$ et $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

1-a- Montrer que la fonction u est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

b- En déduire que l'équation $u(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α

c- Donner le tableau de signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$

2-a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b- Montrer que la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

c- Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote $\Delta: y = x$

d- Vérifier que $f(\alpha) = \alpha + 1$

3- A l'aide d'une intégration par parties ; calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} \left(\frac{f(x)}{e^x + 1} \right) dx$

4-a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{e^x \cdot u(x)}{(e^x + 1)^2}$

b- Dresser le tableau de variations de f

5- On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$; l'asymptote $\Delta: y = x$ et les droites $x = 0$ et $x = 1$

a- Vérifier que $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} \cdot dx$

b- Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $e^x \geq x + 1$; montrer que : $\int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} \cdot dx \leq 1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{x + 2} \cdot dx$

c- En déduire que $\frac{1}{2(e+1)} \leq \mathcal{A} \leq 1 + \ln\left(\frac{4}{9}\right)$

Si $x \in [a, +\infty[$
 $x) \cdot \alpha$ et u est croissant

$$u(x) > u(a)$$

$$u(x) > 0$$

$$I = \int_0^{\ln(2)} \left(\frac{f(x)}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^{\ln(2)} \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$\text{On pose } u = x \iff u' = 1$$

$$v' = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \iff v = \frac{-1}{e^x + 1}$$

d'après I.P.F

$$I = \left[-\frac{x}{e^x + 1} \right]_0^{\ln(2)} + \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 1} dx$$

$$\begin{aligned}
I &= \left[-\frac{x}{e^x+1} \right]_0^{\ln(2)} + \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{e^x+1} dx \\
&= \left[-\frac{x}{e^x+1} \right]_0^{\ln(2)} + \int_0^{\ln(2)} \frac{1+e^x - e^x}{(e^x+1)} dx \\
&= \left[\quad \right]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx \\
&= \left[-\frac{x}{e^x+1} \right]_0^{\ln 2} + \left[x - \ln(e^x+1) \right]_0^{\ln(2)} \\
&= \left(-\frac{\ln 2}{3} + 0 \right) + \left(\ln 2 - \ln 3 - 0 + \ln 2 \right)
\end{aligned}$$

EXERCICE: Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On considère les fonctions u et f définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x + x + 1$ et $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

1-a- Montrer que la fonction u est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
 b- En déduire que l'équation $u(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α
 c- Donner le tableau de signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$

2-a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 b- Montrer que la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote à la courbe C_f .
 c- Étudier la position de la courbe C_f par rapport à son asymptote $\Delta: y = x$
 d- Vérifier que $f(\alpha) = \alpha + 1$

3- À l'aide d'une intégration par parties ; calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} \left(\frac{f(x)}{e^x + 1} \right) dx$

4-a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{e^x \cdot u(x)}{(e^x + 1)^2}$
 b- Dresser le tableau de variations de f

5- On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f ; l'asymptote $\Delta: y = x$ et les droites $x = 0$ et $x = 1$

a- Vérifier que $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} \cdot dx$

b- Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $e^x \geq x + 1$; montrer que : $\int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} \cdot dx \leq 1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{x+2} \cdot dx$

c- En déduire que $\frac{1}{2(e+1)} \leq \mathcal{A} \leq 1 + \ln\left(\frac{4}{9}\right)$

5/

a) $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x) - y| dx \quad (U.A)$

$= \int_0^1 \left| \frac{xe^x}{e^x + 1} - x \right| dx$

$= \int_0^1 \left| \frac{xe^x - x^{e^x + 1} - x}{e^x + 1} \right| dx$

$\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} dx$

b) on a $\forall x \in [0, 1] \quad e^x \geq x + 1$

$\Leftrightarrow e^x + 1 \geq x + 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{x + 2}$

$\frac{x}{e^x + 1} \leq \frac{x}{x + 2}$

$\int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} dx \leq \int_0^1 \frac{x}{x + 2} dx$


EXERCICE:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On considère les fonctions u et f définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x + x + 1$ et $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

1-a- Montrer que la fonction u est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
 b- En déduire que l'équation $u(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α
 c- Donner le tableau de signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$

2-a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 b- Montrer que la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
 c- Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote $\Delta: y = x$
 d- Vérifier que $f(\alpha) = \alpha + 1$

3- A l'aide d'une intégration par parties ; calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} \left(\frac{f(x)}{e^x + 1} \right) dx$

4-a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{e^x \cdot u(x)}{(e^x + 1)^2}$
 b- Dresser le tableau de variations de f

5- On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$; l'asymptote $\Delta: y = x$ et les droites $x = 0$ et $x = 1$

a- Vérifier que $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} \cdot dx$

b- Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $e^x \geq x + 1$; montrer que : $\int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} \cdot dx \leq 1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{x + 2} \cdot dx$

c- En déduire que $\frac{1}{2(e+1)} \leq \mathcal{A} \leq 1 + \ln\left(\frac{4}{9}\right)$

0.75
0.25
0.25
0.5
0.5
0.25
0.25
1
0.75
0.5
0.25
0.5
1

d'ici

$$\int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} \leq \int_0^1 \frac{x + \frac{e}{2} - \frac{e}{2}}{x + 2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} dx \leq \int_0^1 \left(1 - \frac{\frac{e}{2}}{x + 2} \right) dx$$

$$\int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} dx \leq \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{\frac{e}{2}}{x + 2} dx$$

$$\leq 1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{x + 2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{x}{e^x + 1} dx \leq 1 - 2 \left[\ln(x + 2) \right]_0^1$$

$$\leq 1 - 2(\ln 3 - \ln 2)$$

$$\leq 1 + 2(\ln 2 - \ln 3)$$

$$\leq 1 + 2 \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$0 \leq x \leq 1$
 $e^0 \leq e^x \leq e$
 $2 \leq e^x + 1 \leq e + 1$

6- Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{xe^x}{e^x + 1}\right)$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g

a- Montrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{u(x)}{x(e^x + 1)}$

0.5

b- Vérifier que $g(-\alpha) = 0$ et $g'(-\alpha) = 1$

1

c- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

0.5

d- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement le résultat

1

7- Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point A d'abscisse $-\alpha$

1.25

Construire la courbe $\mathcal{C}_f$; la tangente T et la courbe $\mathcal{C}_g$ ($\alpha \approx -1.28$)



Exercice 03 (Examen 2023-Session-Normal)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $b = 1 + \sqrt{2} + i$; $c = \bar{b}$ et $d = 2i$

1) Ecrire le nombre a sous forme trigonométrique

2) a) Vérifier que $b - d = c$

b) Montrer que $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$ et déduire que les points A, B et D sont alignés

3) a) Vérifier que $ac = 2b$

b) En déduire que $2\arg(b) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'

a) Montrer que $z' = \frac{1}{2}az$

b) En déduire que $R(C) = B$ et que $R(A) = D$

Montrer que $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduire une mesure de l'angle

$(\widehat{AC, AB})$

II) le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On suppose que $\operatorname{Re}(a) \neq \operatorname{Im}(a)$; on considère les points C ; B ; A

d'affixes $1 + ia$; $i\bar{a}$; a

1) On pose $Z = \frac{(1 + ia) - a}{i\bar{a} - a}$

a) Vérifier que $\bar{Z} = \frac{(i - 1)\bar{a} - i}{i\bar{a} - a}$

b) montrer que C ; B ; A sont alignés si et seulement si $\operatorname{Im}(a) = \frac{1}{2}$

2) on suppose que $\operatorname{Im}(a) \neq \frac{1}{2}$, soient R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $B' = R_1(B)$ et $C' = R_2(C)$;

E est le milieu du $[BC]$

a) Déterminer c' ; b' affixes des points C' ; B'

b) montrer que (AE) et $(B'C')$ sont perpendiculaire et que $B'C' = 2AE$

5

Montrer que $\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx \leq 1$

$$\frac{1}{1+\pi^2} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx \leq \frac{4}{4+\pi^2} \quad , \quad \frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t} dt \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

6

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$; $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ pour tout entier naturel n

1) calculer I_0 , J_0

2) montrer que $I_n + nJ_n = 1$ et $J_n - nI_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$ puis déduire J_n , I_n

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} dx$$

$$\Leftrightarrow [x]_0^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \frac{2}{\sqrt{3}} [x]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

soit $x \in [0, \pi/4]$ c.à.d $0 \leq x \leq \pi/4$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(x) \leq 1 \\ 1 \leq \frac{1}{\cos(x)} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$
 on a $\cos$ est $\downarrow$ sur $[0, \pi/4]$
 $\cos(\pi/4) \leq \cos(x) \leq \cos(0)$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/4} 1 dx \leq \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)} dx \leq \int_0^{\pi/4} \sqrt{2} dx$$

$$\Leftrightarrow [x]_0^{\pi/4} \leq \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)} dx \leq \sqrt{2} [x]_0^{\pi/4}$$

$$\pi/4 \leq \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t} dt \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$



• Soit $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq -x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq 1-x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

8

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$

- 1) calculer I_1 , I_0
- 2) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n$
 b) en déduire la valeur de I_2
- 3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad I_{n+1} \leq I_n$
 b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

9

Exercice 29 : Soit la rotation r de centre $\Omega (i)$ et

transforme O en $O' \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)$

Déterminer l'angle de cette rotation

Soit α l'angle de l'angle

$$R(O) = O' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega O = \Omega O' \\ (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega O'}) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$$

$$\alpha \equiv (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega O'}) [2\pi]$$

$$\equiv \arg \left(\frac{Z_{O'} - Z_{\Omega}}{Z_O - Z_{\Omega}} \right) [2\pi]$$

$$\equiv \arg \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - i}{0 - i} \right) [2\pi]$$

$$\equiv \arg \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{-i} \right) [2\pi]$$

$$\equiv \arg \left(\frac{i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{1} \right) [2\pi]$$

$$Z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ona } Z = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$Z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$



$$Z = e^{i\pi/3}$$

$$\alpha \equiv \pi/3 [2\pi]$$

Exercice 36 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un complexe non nul ; Pour tout nombre

z de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, on pose : $f_a(z) = z' = \frac{az}{z-a}$

1. Montrer que :

$$f_a(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \operatorname{Re}(z)$$

2. Soit z un élément de $\mathbb{C}^* \setminus \{a\}$

on pose : $|z-a| = r$ et $\arg(z-a) \equiv \theta [2\pi]$

a. Calculer $|f_a(z) - a|$ en fonction de r et $|a|$

b. Calculer $\arg(f_a(z) - a)$ en fonction de θ et r .

3. on pose $a = -1 + i$ et considérons les ensembles des points $M(z)$ définis par :

$$(D) = \{M(z); \arg(z-a) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]\}$$

$$(C) = \{M(z); |f_a(z) - a| = 2\}$$

$$(E) = \{M(z); f_a(z) \in i\mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\bar{z}} \\ \bar{z}z &= |z|^2 \end{aligned}$$

$$f_a(z) = \frac{az}{z-a}$$

$$f_a(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{f_a(z)} = -f_a(z)$$

$$\begin{aligned} a + \bar{a} &= 2\operatorname{Re}(a) \\ a - \bar{a} &= 2i\operatorname{Im}(a) \end{aligned}$$

$$z \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

$$\Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\bullet z \in i\mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\bullet z \in i\mathbb{R}^-$$

$$\Leftrightarrow \arg z \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\begin{array}{cc} ib & -ib \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{a}\bar{z}}{\bar{z}-\bar{a}} = -\frac{az}{z-a}$$

$$\Leftrightarrow \bar{a}\bar{z}(z-a) = -az(\bar{z}-\bar{a})$$

$$\Leftrightarrow \bar{a}\bar{z}z - a\bar{a}\bar{z} = -a\bar{z}\bar{z} + a\bar{a}z$$

$$\Leftrightarrow \bar{a}|z|^2 - \bar{a}|a|^2 = -a|z|^2 + |a|^2 z$$

$$\Leftrightarrow (\bar{a}+a)|z|^2 = |a|^2(z+\bar{z})$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(a)|z|^2 = |a|^2 2\operatorname{Re}(z) \quad \text{C.Q.F.D}$$

Exercice38 : soit a et b et c des nombres complexes tels que : $|a|=|b|=|c|=1$
et $a \neq c$ et $b \neq c$

1) Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2) en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$

Exercice39 : soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

1) Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\text{Im}(S) > 0$

3) calculer $S+T$ et $S \times T$

4) en déduire les nombres S et T

$z \in \mathbb{A}_{7,1}$
 $\mathbb{A}_{7,1} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{A}_{7,1}$

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{z} = z \\ &\Leftrightarrow \arg z = 0 [\pi] \end{aligned}$$

$$1) \text{ il suffit de Mg } \overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}$$

$$\text{on a } \overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}}\right)^2 \times \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

$$\begin{aligned} \text{on a } |a|=1 &\Leftrightarrow \sqrt{a\bar{a}} = 1 \\ &\Leftrightarrow a\bar{a} = 1 \\ &\quad \bar{a} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$|b|=1 \Leftrightarrow \bar{b} = \frac{1}{b}$$

$$|c|=1 \Leftrightarrow \bar{c} = \frac{1}{c}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}} \right)^2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}$$

$$= \dots \dots \dots$$

$$= \dots \dots \dots$$

$$= \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \text{ (à vérifier)}$$

$$\text{donc } \boxed{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}}$$

$$\text{donc } \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)$$

Exercice38 : soit a et b et c des nombres complexes tels que : $|a|=|b|=|c|=1$

et $a \neq c$ et $b \neq c$

1) Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2) en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice39 : soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

1) Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\text{Im}(S) > 0$

3) calculer $S+T$ et $S \times T$

4) en déduire les nombres S et T

$$1, \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 + \arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0 \left[\pi\right]$$

$$\Leftrightarrow 2 \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) + \arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0 \left[\pi\right]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) + \frac{1}{2} \arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv -\frac{1}{2} \arg\left(\frac{a}{b}\right) \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

EXERCICE 5

Soit n un entier naturel.

On considère la fonction φ_n définie par : $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$ et on pose $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$

1) calculer I_0 et I_1

2) a) montrer que $(I_n)_n$ est décroissante ; convergente

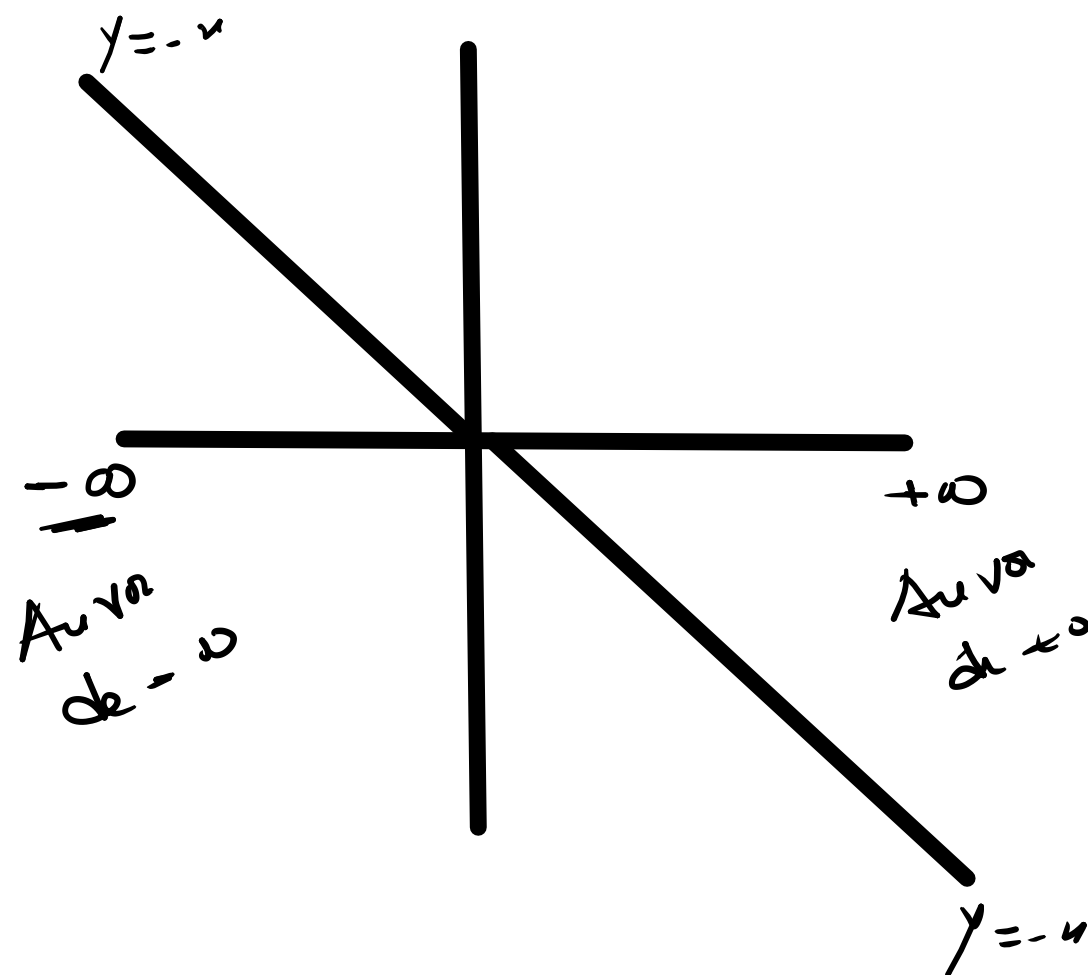
b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$

b) en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(nI_n - 1)$

EXERCICE 6

$y = -x$ asym. $-\infty$



EXERCICE 5

Soit n un entier naturel.

On considère la fonction φ_n définie par : $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$ et on pose $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$

1) calculer I_0 et I_1

2) a) montrer que $(I_n)_n$ est décroissante ; convergente

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

1) on a $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$

3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$

b) en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(I_n - 1)$

EXERCICE 6

$$I_1 = \int_0^1 (1-x) e^{-2x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } u &= 1-x & \iff & u' = -1 \\ v' &= e^{-2x} & \iff & v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{aligned}$$

d'où d'après I.P.P

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[(1-x) \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) dx \\ &= \left(0 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (e^{-2} - e^0) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-2} \end{aligned}$$

$(1-x)^{n+1} = (1-x)^n \cdot (1-x)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx - \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= \int_0^1 \left((1-x)^{n+1} e^{-2x} - (1-x)^n e^{-2x} \right) dx \\ &= \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} ((1-x) - 1) dx \\ &= \int_0^1 (1-x)^n (-x) e^{-2x} dx \\ \text{On a } 0 \leq x \leq 1 &\implies \left. \begin{aligned} 1-x &\geq 0 \\ (1-x)^n &\geq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -x &\leq 0 \\ e^{-2x} &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

ALPES

EXERCICE 5

Soit n un entier naturel.

On considère la fonction φ_n définie par : $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$ et on pose $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$

1) calculer I_0 et I_1

2) a) montrer que $(I_n)_n$ est décroissante ; convergente

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$

b) en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(nI_n - 1)$

EXERCICE 6

d'où $I_{n+1} - I_n \leq 0$

donc (I_n) est décroissante

on a : $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$

on a $\forall x \in [0, 1] \quad (1-x)^n \geq 0$ et $e^{-2x} > 0$

donc $I_n \geq 0$ d'où (I_n) minorée

et comme (I_n) décroissante

Alors (I_n) est convergente

b) soit $n \in \mathbb{N}^*$ Mg
 $I_n \leq \frac{1}{n+1}$

on a $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$

soit $x \in [0, 1]$

on a $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow -2 \leq -2x \leq 0$

$e^{-2} \leq e^{-2x} \leq 1$

$\Rightarrow (1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n$

$\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \leq \int_0^1 (1-x)^n dx$

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\lim 0 = 0$

d'où $I_n \rightarrow 0$

$I_n \leq \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$

$I_n \leq \frac{1}{n+1}$

EXERCICE 5

Soit n un entier naturel.

On considère la fonction φ_n définie par : $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$ et on pose $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$

1) calculer I_0 et I_1

2) a) montrer que $(I_n)_n$ est décroissante ; convergente

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$

b) en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(nI_n - 1)$

EXERCICE 6

3) a) I.P.P

$$\tilde{I}_{n+1} = \int_0^1 \underset{P}{(1-x)^{n+1}} \underset{E}{e^{-2x}} dx$$

$$\text{On pose } U = (1-x)^{n+1} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot \end{matrix} \quad U' = (n+1)(1-x)(1-x)^n = -(n+1)(1-x)^n$$

$$V' = e^{-2x} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \quad V = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\text{d'où } I_{n+1} = \left[-\frac{1}{2} (1-x)^{n+1} e^{-2x} \right]_0^1 - \underbrace{\frac{1}{2}(n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx}_{I_n}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(n+1) I_n$$

$$2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$