page 1

LA FONCTION EXPONENTIELLE

* l'exponentielle neperienne :

→ la fonction exponentielle neperienne est la fonction réciproque de la fonction $\ln$ et on la note $\exp$

$$\exp : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[\\ x \longmapsto \exp(x) = e^x \text{ (nombre)} \end{array}$$

→ $\begin{cases} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in]0,+\infty[\end{cases}$

- la fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ e^{\ln(x)} = x$, $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ln(e^x) = x$

$f(f^{-1}(x)) = x$ et $f^{-1}(f(x)) = x$

- $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ • $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x > 0$

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, $(e^x)^y = e^{xy}$

$e^0 = 1$, $e^1 = e$

→ **Les limites de l'exp :** $(n \in \mathbb{N}^*)$

① $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0^+$, ② $\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$

③ $\lim\limits_{-\infty} x^n \cdot e^x = 0$, ④ $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

⑤ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$(x^2)' = 2x$

→ la dérivée de la fonction exp.

Si u est une fonction dérivable sur D_u

Alors $(\forall x \in D_u)$ $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

→ Primitive de la fonction $x \to u'(x)e^{u(x)}$ est la fonction $x \to e^{u(x)}$

page 2

Exemple :

- Résoudre :

$$e^{x^2+x} \geq 1$$

$D_E = \mathbb{R}$

$(E) \Leftrightarrow \ln(e^{x^2+x}) \geq \ln(1)$

$\Leftrightarrow \quad x^2+x \geq 0$

$x(x+1) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2+x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$

- Exemple

simplifier

$e^{Ln(3)} = 3$

$e^{-Ln(3)} = e^{\ln(\frac{1}{3})} = \frac{1}{3}$

$e^{-Ln(3)} = \frac{1}{e^{Ln(3)}} = \frac{1}{3}$

$e^{2\ln(8)} = e^{\ln 8^2} = 8^2 = 64$

Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0$

on pose $X = e^x > 0$

$\Rightarrow X^2 - 3X + 2 \geq 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$X = \frac{3+1}{2}$, $X = \frac{3-1}{2}$

$= 2$, $X = 1$

X	0		1		2		$+\infty$
X^2-3X+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$X \in]0, 1] \cup [2, +\infty[$

$0 < X < 1$ ou $X > 2$

$0 < e^x < 1$ ou $e^x > 2$

$x < 0$ ou $x > Ln(2)$

$S =]-\infty, 0[\cup]\ln 2, +\infty[$

→ les limites

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x-1)e^x$ F.I

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x + xe^x - e^x = 0$

car $\begin{cases}\lim\limits_{-\infty} x^n e^x = 0\\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+x^3+1}$ F.I

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}$

$+\infty$ $\quad 0 \quad 0$

$= +\infty$ car $\begin{cases}\lim \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty\\ \lim 1/x = 0 \text{ et } \lim \dfrac{1}{x^3} = 0\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$

On pose $t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2$

qd $x\to+\infty$ on a $t\to+\infty$

$\to \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t^4} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-e^x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0} e^x\left(\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\right)\cdot 3$

$= e^0\times1\times3 = 3$ (car $\lim\limits_{0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}=1$)

$t=3x$

$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$

$\lim \dfrac{e^{(\dots)}-1}{(\dots)}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$

On pose $t=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{t}$

qd $x\to+\infty$ Alors $t\to0$

d'où : $= \lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t} = 1$

EXERCICE 2 $(3,5\,pts)$

0,5pt 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexe $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$

2) on considère dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points :

A, B, C d'affixes respectivement : $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = \overline{b}$

0,5pt a) Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe b

0,5pt b) Déduire que : $a^6 + b^6 = 0$

0,5pt c) Déterminer a' l'affixe du point A' image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

1pt d) Déduire que : $\arg(a'c) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$ et que $|a'c| = 12$ puis déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

0,5pt e) Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points $M(z)$ v réifiant :

$$\frac{z-c}{z-b} \in \mathbb{R}$$

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_2^4 3x\,dx$ **2)** $J = \int_0^1 (2x+3)\,dx$

3) $K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t}\,dt$ 4) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\,d\theta$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1)\,dx$ 2) $I_2 = \int_{-1}^1 \left(x^4 - 4x^3 + 2\right)dx$

3) $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ 4) $I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t}\,dt$

5) $I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2}\,dt$ 6) $I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

7) $I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ 8) $I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$

9) $I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ 10) $I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx$

11) $I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx$ 12) $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x\,dx$

13 $I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5}\,dx$ 14) $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x)\,dx$

15) $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$ 16) $I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1}\right)dx$

Exercice4: on pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-J$

2)en déduire I et J

Exercice5 :

on pose : $I=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ et $J=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-3J$

2)en déduire I et J

Exercice6: Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$ 2) $I=\int_0^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$

3) $I=\int_0^2\left|x^2-x-2\right|dx$

Exercice7:on pose :

$A=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)dt$ et $B=\int_1^e\left(1+\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$

Calculer $A+B$

Exercice6: Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx$ 2) $I = \int_0^{\ln 3} |2-e^x| dx$

3) $I = \int_0^2 |x^2-x-2| dx$

Exercice7:on pose :

$A = \int_1^e \left(\frac{1}{t}+\ln t\right)dt$ et $B = \int_1^e \left(1+\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$

Calculer $A+B$

Exercice8:on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx$ et

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-J$

2)en déduire I et J

Exercice9 :on pose : $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$ et

$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$

1)Calculer $K+L$ et $K-L$

2)en déduire K et L

Exercice6: Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2}\,dx$ 2) $I = \int_0^{\ln 3} |2-e^x|\,dx$

3) $I = \int_0^2 |x^2-x-2|\,dx$

Exercice7:on pose :

$A = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t\right)dt$ et $B = \int_1^e \left(1 + \ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$

Calculer $A+B$

Exercice8:on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x\,dx$ et

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x\,dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-J$

2)en déduire I et J

Exercice9 :on pose : $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,dx$ et

$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$

1)Calculer $K+L$ et $K-L$

2)en déduire K et L