3,5p **Exercice 11** (2019-N)

On admet que le nombre 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.

Soient $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{m}$ deux entiers naturels vérifiant : $\boldsymbol{n^8 + m^8 \equiv 0[2969]}$.

1) On suppose dans cette question que **2969** ne divise pas $\boldsymbol{n}$

0,5 a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $\boldsymbol{(\exists u \in \mathbb{Z}); u{\times}n \equiv 1[2969]}$

0,5 b) En déduire que : $\boldsymbol{(u{\times}m)^8 \equiv -1[2969]}$ et que : $\boldsymbol{(u{\times}m)^{2968} \equiv -1[2969]}$. ($\boldsymbol{2968 = 8{\times}371}$)

0,5 c) Montrer que 2969 ne divise pas $\boldsymbol{u{\times}m}$.

0,5 d) En déduire qu'on a aussi $\boldsymbol{(u{\times}m)^{2968} \equiv 1[2969]}$.

0,5 2) a) En utilisant les résultats précédents, montrer que **2969** divise $\boldsymbol{n}$

0,5 b) Montrer que : $\boldsymbol{n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \Leftrightarrow n \equiv 0[2969]}$ et $\boldsymbol{m \equiv 0[2969]}$.

$3p$ **Exercice 12** (2018-N)

Soit $\boldsymbol{p}$ un nombre premier tel que : $\boldsymbol{p = 3 + 4k}$ avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^*$.

0, 5 1. Montrer que pour tout entier relatif $\boldsymbol{x}$, si $\boldsymbol{x^2 \equiv 1[p]}$ alors $\boldsymbol{x^{p-5} \equiv 1[p]}$.

2. Soit $\boldsymbol{x}$ un entier relatif $\boldsymbol{x}$ vérifiant $\boldsymbol{x^{p-5} \equiv 1[p]}$.

0, 5 a) Montrer que $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{p}$ sont premier entre eux.

0, 5 b) Montrer que $\boldsymbol{x^{p-1} \equiv 1[p]}$.

0, 5 c) Vérifier que $\boldsymbol{2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)}$.

0, 5 d) En déduire que $\boldsymbol{x^2 \equiv 1[p]}$.

0, 5 3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $\boldsymbol{x^{62} \equiv 1[67]}$.

$3p$	**Exercice 13** **(2017-N)** On admet que $\mathbf{2017}$ est un nombre premier, et que : $\mathbf{2016 = 2^5 3^2 7}$ Et soit $\boldsymbol{p}$ un nombre premier supérieur ou égale à $\mathbf{5}$.
	1) Soit $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ un couple de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ vérifiant : $\boldsymbol{px+y^{p-1}=2017}$
$0,25$	a) Vérifier que : $\boldsymbol{p<2017}$.
$0,5$	b) Montrer que : $\boldsymbol{p}$ ne divise pas $\boldsymbol{y}$.
$0,75$	c) Montrer que : $\boldsymbol{y^{p-1}\equiv 1[p]}$ puis en déduire que $\boldsymbol{p}$ divise 2016 .
$0,5$	d) Montrer que : $\boldsymbol{p=7}$.
1	2) Déterminer, suivant les valeurs de $\boldsymbol{p}$, les couples $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ vérifiant : $\boldsymbol{px+y^{p-1}=2017}$

$3,5p$ **Exercice 7** **(2021-R)**

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$

Soit p un nombre premier impair tel que : p divise A

1 1) a) Montrer que : $a^7 \equiv 1[p]$ en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); a^{7n} \equiv 1[p]$

1 b) Montrer que a et p sont premiers entre eux, en déduire que : $(\forall m \in \mathbb{N}); a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$

2) On suppose que 7 ne divise pas $p-1$

$0,5$ a) Montrer que : $a \equiv 1[p]$

$0,5$ b) En déduire que : $p = 7$

1 3) Montrer que si p un nombre premier impair tel que : p divise A Alors : $p = 7$ ou $p \equiv 1[7]$.

$4p$ **Exercice 8** **(2021-N)** On considère dans $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ l'équation : $(\boldsymbol{E}) : \boldsymbol{47x - 43y = 1}$

Partie 1

$\mathbf{0,25}$ 1) Vérifier que $\mathbf{(11;12)}$ est une solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$

$\mathbf{0,75}$ 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ l'équation $(\boldsymbol{E})$.

Partie 2

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(\boldsymbol{F}) : \boldsymbol{x^{41}} \equiv 4[\mathbf{43}]$

1) Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation $(\boldsymbol{F})$.

$\mathbf{0,5}$ a) Montrer que $\boldsymbol{x}$ et $\mathbf{43}$ sont premiers entre eux, en déduire que : $\boldsymbol{x^{42}} \equiv \mathbf{1}[\mathbf{43}]$

$\mathbf{0,5}$ b) Montrer que : $\mathbf{4}\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{1}[\mathbf{43}]$, , en déduire que : $\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{11}[\mathbf{43}]$

$\mathbf{0,5}$ c) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $(\boldsymbol{F})$.

Partie 3

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant : $(\boldsymbol{S}) : \begin{cases} \boldsymbol{x^{41}} \equiv 4[\mathbf{43}] \\ \boldsymbol{x^{47}} \equiv \mathbf{10}[\mathbf{47}] \end{cases}$

1) Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation $(\boldsymbol{S})$

$\mathbf{0,5}$ a) Montrer que $\boldsymbol{x}$ est une solution du système $(\boldsymbol{S'}) : \begin{cases} \boldsymbol{x} \equiv \mathbf{11}[\mathbf{43}] \\ \boldsymbol{x} \equiv \mathbf{10}[\mathbf{47}] \end{cases}$

$\mathbf{0,5}$ b) Déduire que : $\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{527}[\mathbf{2021}]$

$\mathbf{0,5}$ 2) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système ($\boldsymbol{S}$).

$\mathbf{3,5}p$	**Exercice 9** **(2020-R)** Soient $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ deux premiers tq : $\boldsymbol{p < q}$ et $\boldsymbol{9^{p+q-1} \equiv 1[pq]}$
$\mathbf{0,5}$	1) a) Montrer que $\boldsymbol{p}$ et 9 sont premiers entre eux.
$\mathbf{1}$	b) Déduire que : $\boldsymbol{9^{p-1} \equiv 1[p]}$ et que : $\boldsymbol{9^{q} \equiv 1[p]}$
$\mathbf{0,5}$	2) a) Montrer que $\boldsymbol{p-1}$ et $\boldsymbol{q}$ sont premiers entre eux.
$\mathbf{0,5}$	b) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $\mathbf{p = 2}$
$\mathbf{0,5}$	3) a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $\boldsymbol{9^{q-1} \equiv 1[q]}$
$\mathbf{0,5}$	b) En déduire que : $\boldsymbol{q = 5}$.

$3,5p$ **Exercice 11** **(2019-N)**

On admet que le nombre 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.

Soient $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{m}$ deux entiers naturels vérifiant : $\boldsymbol{n^8 + m^8 \equiv 0[2969]}$.

1) On suppose dans cette question que **2969** ne divise pas $\boldsymbol{n}$

$0,5$ a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists \boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}); \boldsymbol{u \times n \equiv 1[2969]}$

$0,5$ b) En déduire que : $\boldsymbol{(u \times m)^8 \equiv -1[2969]}$ et que : $\boldsymbol{(u \times m)^{2968} \equiv -1[2969]}$. ($\boldsymbol{2968 = 8 \times 371}$)

$0,5$ c) Montrer que 2969 ne divise pas $\boldsymbol{u \times m}$.

$0,5$ d) En déduire qu'on a aussi $\boldsymbol{(u \times m)^{2968} \equiv 1[2969]}$.

$0,5$ 2) a) En utilisant les résultats précédents, montrer que **2969** divise $\boldsymbol{n}$

$0,5$ b) Montrer que : $\boldsymbol{n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \Leftrightarrow n \equiv 0[2969]}$ et $\boldsymbol{m \equiv 0[2969]}$.

$3p$ **Exercice 12** **(2018-N)**

Soit p un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

$0,5$ 1. Montrer que pour tout entier relatif x, si $x^2 \equiv 1[p]$ alors $x^{p-5} \equiv 1[p]$.

2. Soit x un entier relatif x vérifiant $x^{p-5} \equiv 1[p]$.

$0,5$ a) Montrer que x et p sont premier entre eux.

$0,5$ b) Montrer que $x^{p-1} \equiv 1[p]$.

$0,5$ c) Vérifier que $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$.

$0,5$ d) En déduire que $x^2 \equiv 1[p]$.

$0,5$ 3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$.

3p	**Exercice 13** **(2017-N)** On admet que **2017** est un nombre premier, et que : $\mathbf{2016 = 2^5 3^2 7}$ Et soit $\boldsymbol{p}$ un nombre premier supérieur ou égale à **5**.
	1) Soit $(x;y)$ un couple de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$
0,25	a) Vérifier que : $p < 2017$.
0,5	b) Montrer que : p ne divise pas y.
0,75	c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1[p]$ puis en déduire que p divise 2016 .
0,5	d) Montrer que : $p = 7$.
1	2) Déterminer, suivant les valeurs de p, les couples $(x;y)$ de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ vérifiant : $px+y^{p-1} = 2017$

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

$p \in \mathbb{P}$, $p > 5$

Soit $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $px + y^{p-1} = 2017$

a) $p < 2017$

onsuppose que $p \geqslant 2017$ et on a $x \in \mathbb{N}^*$

donc $x \geqslant 1$

donc $px \geqslant 2017$

et $y^{p-1} \geqslant 1$ $\Longrightarrow px + y^{p-1} \geqslant 2018$

$2017 \geqslant 2018$ absurde

$$\begin{array}{r|l} 2016 & 2 \\ 1008 & 2 \\ 504 & 2 \\ 252 & \end{array}$$

$a \equiv 0[n]$

n/a

d'où $p < 2017$

b/ Par L'absurd

onsuppose que p/y

donc p/y^{p-1}

et on a p/px

donc $p/px + y^{p-1}$

donc $p/2017$

et on a p est premier

et 2017 premier

absurd

car $p < 2017$

donc p ne divise pas 2017

c) On a p premier

et p ne divise pas y

donc $p \wedge y = 1$

d'après petit th de Fermal

$y^{p-1} \equiv 1[p]$

dedui

on a $y^{p-1} \equiv 1[p]$

$px + y^{p-1} \equiv px + 1[p]$

$\Leftrightarrow 2017 \equiv px + 1[p]$ et on a

$px \equiv 0[p]$

$\Leftrightarrow 2017 \equiv 1[p]$

$p/2016 \longleftarrow \Leftrightarrow 2016 \equiv 0[p]$

$3p$	**Exercice 13** (2017-N) On admet que **2017** est un nombre premier, et que : $\mathbf{2016 = 2^5 3^2 7}$ Et soit p un nombre premier supérieur ou égale à **5**.
	1) Soit $(x;y)$ un couple de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$
$0,25$	a) Vérifier que : $p < 2017$.
$0,5$	b) Montrer que : p ne divise pas y.
$0,75$	c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1[p]$ puis en déduire que p divise 2016 .
$0,5$	d) Montrer que : $p = 7$.
1	2) Déterminer, suivant les valeurs de p, les couples $(x;y)$ de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ vérifiant : $px+y^{p-1} = 2017$

4

d) Mq $p=7$

on a $p/2016$ et on a $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ et p premier

donc $p/2^5$ ou $p/3^2$ ou $p/7$

$p=2$ ou $p=3$ ou $p=7$ (2, 3 et 7 sont premiers)

et on sait que $p \geq 5$ donc $p=7$

2/ si $p \geq 5$ alors d'après 1 d

$p \Rightarrow q$

$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

Alors : $p=7$

$7x + y^6 = 2017$

$y^6 = 2017 - 7x$

$y^6 < 2017$

$y < \sqrt[6]{2017} \simeq 3..$

$y = 1$ ou $y=2$ ou $y=3$.

. si $y = 1 \Rightarrow 7x + 1 = 2017$

$\Rightarrow 7x = 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

$\boxed{x = 2^5 \cdot 3^2} =$

. si $y=2 \Rightarrow 7x + 64 = 2017$

$\Rightarrow 7x = 2017 - 64$

$\Rightarrow 7x = 1953$

$x = 279$

. si $y=3$ alors $7x + 3^6 = 2017$

$7x = 2017 - 729$

$7x = 1288$

$x = 184$

si $p \neq 7$

Alors l'équation n'admet pas de sol

$S = \{(288,1), (279,2), (184,3)\}$

Exercice 5 : (4 pts)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ et $g(0)=1$

0.5 **1 -** Montrer que la fonction g est paire.

0.75 **2 -** Montrer que la fonction $g$est dérivable sur $]0,+\infty[$. puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$

0.5 **3 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que ; pour tout $x>0$:

$$\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$$

0.75 **b)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, On a : $|g(x)|\leq\frac{2}{x}$ puis déduire $\lim_{x\to+\infty}g(x)$

0.5 **4 - a)** Montrer que : $(\forall x>0);0\leq\int_x^{3x}\frac{1-\mathrm{cos}t}{\mathbf{t}}\mathrm{d}t\leq\mathbf{2x}$

(Remarquer que : $(\forall \mathrm{t}>0)$; $1-\cos\mathbf{t}\leq\mathbf{t}$)

0.5 **b)** Vérifier que $(\forall x>0);g(x)-\ln 3=\int_x^{3x}\frac{\mathrm{cos}t-1}{t}dt$

0.5 **c)** En déduire que : $\lim_{x\to 0^+}\mathbf{g}(x)$

0,5 pt	b) Calculer $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ puis déduire la valeur de l'intégrale $\int_0 f(x)dx$.

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(0) = \ln 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{pour} \quad x > 0$$

0,5 pt	**1 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad (\forall t \in [x, 2x]) \quad e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$.
0,5 pt	**b)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad e^{-2x} \ln 2 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x} \ln 2$. .
0,25 pt	**c)** En déduire que la fonction g est continue à droite en 0 .
0,75 pt	**2 -** Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$. .
0,5 pt	**3 - a)** Montrer que s : $(\forall t > 0) \quad -1 \leqslant \frac{e^{-t} - 1}{t} \leqslant e^{-t}$ (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).
0,5 pt	**b)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad -1 \leqslant \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leqslant \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$..
0,5 pt	**c)** En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 .

1) a) evident : soit $x>0$ et $t \in [x, 2x]$

b) soit $x>0$ et $x \leqslant t \leqslant 2x$

ona $e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$

$$\Rightarrow \frac{e^{-2x}}{t} \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{e^{-x}}{t}$$

Donc $\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t} dt \leqslant g(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t} dt$

$$\Leftrightarrow e^{-2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leqslant g(x) \leqslant e^{-x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow e^{-2x} [\ln t]_x^{2x} \leqslant g(x) \leqslant e^{-x} [\ln t]_x^{2x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-2x} (\ln 2x - \ln x) \leqslant g(x) \leqslant e^{-x} (\ln 2x - \ln x)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e^{-2x} \ln(2) \leqslant g(x) \leqslant e^{-x} \ln(2)}$$

c) ona $\lim_{0^+} e^{-2x} \ln(2) = \ln(2)$

et $\lim_{0^+} e^{-x} \ln(2) = \ln(2)$

d'ou $\lim_{0^+} g(x) = \ln(2) = g(0)$

d'ou g est continue à droite de 0

0,5 pt b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ puis déduire la valeur de l'intégrale $\int_0 f(x)dx$.

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$g(0) = \ln 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \quad \text{pour} \quad x > 0$$

0,5 pt	**1 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0)$ $(\forall t \in [x, 2x])$ $e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$.
0,5 pt	**b)** Montrer que : $(\forall x > 0)$ $e^{-2x}\ln 2 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\ln 2$. .
0,25 pt	**c)** En déduire que la fonction g est continue à droite en 0 .
0,75 pt	**2 -** Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$. .
0,5 pt	**3 - a)** Montrer que s : $(\forall t > 0)$ $-1 \leqslant \frac{e^{-t}-1}{t} \leqslant e^{-t}$ (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).
0,5 pt	**b)** Montrer que : $(\forall x > 0)$ $-1 \leqslant \frac{g(x)-\ln 2}{x} \leqslant \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$..
0,5 pt	**c)** En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 .

2) $g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$

on a la fonction $t \to \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et

on pose $u(x) = x$ et $v(x) = 2x$

on a $u]0,+\infty[=]0,+\infty[\subset \mathbb{R}^*$ et $v]0,+\infty[= \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^*$

et u et v sont dérivable sur $]0,+\infty[$

donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$

Rappel

$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t).dt}$

→ on a f est continue sur D_f.

→ et F est la primitive de f qui s'annule en a

Alors F est dérivable sur I

et $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$

$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t).dt$

→ on a f est continue sur D_f.

→ et $u(I) \subset D_f$
$v(I) \subset D_f$

→ u et v est dérivable sur I

Alors F est dérivable sur I

$\forall x \in I$
$F'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$

0,5 pt	b) Calculer $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ puis déduire la valeur de l'intégrale $\int_0 f(x)dx$.

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$g(0) = \ln 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \quad \text{pour} \quad x > 0$$

0,5 pt	**1 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad (\forall t \in [x, 2x]) \quad e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$.
0,5 pt	**b)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad e^{-2x}\ln 2 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\ln 2$. .
0,25 pt	**c)** En déduire que la fonction g est continue à droite en 0 .
0,75 pt	**2 -** Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$. .
0,5 pt	**3 - a)** Montrer que s : $(\forall t > 0) \quad -1 \leqslant \frac{e^{-t}-1}{t} \leqslant e^{-t}$ (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).
0,5 pt	**b)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad -1 \leqslant \frac{g(x)-\ln 2}{x} \leqslant \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$..
0,5 pt	**c)** En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 .

$(\forall x\in]0,+\infty[) \quad g'(x) = (2x)'\frac{e^{-2x}}{2x} - (x)'\frac{e^{-x}}{x}$

$= \frac{e^{-2x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

3) Soit $t>0$

$t>a$

$[a,t]$

$t>1$

$[1,t]$

on pose $f(x) = e^{-x}$

on a la fonction $x \to e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ $\to$ dérivable

donc f continue sur $[0,t]$

et f dérivable sur $]0,t[$

$\forall x\in]0,t[\quad f'(x) = -e^{-x}$

$0 < x < t$

$-t < -x < 0$

$e^{-t} < e^{-x} < e^0$

$-1 < -e^{-x} < -e^{-t}$

$-1 < f'(x) < -e^{-t}$

d'après I.A.F

$-1 < \frac{f(t)-f(0)}{t-0} < -e^{-t}$

$-1 < \frac{e^{-t}-1}{t} < -e^{-t}$

0,5 pt b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ puis déduire la valeur de l'intégrale $\int_0 f(x)dx$.

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$g(0)=\ln 2 \quad \text{et} \quad g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt \quad \text{pour} \quad x>0$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x>0) \quad (\forall t\in[x,2x]) \quad e^{-2x}\leqslant e^{-t}\leqslant e^{-x}$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x>0) \quad e^{-2x}\ln 2\leqslant g(x)\leqslant e^{-x}\ln 2$. .

0,25 pt **c)** En déduire que la fonction g est continue à droite en 0 .

0,75 pt **2 -** Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$. .

0,5 pt **3 - a)** Montrer que s : $(\forall t>0) \quad -1\leqslant \frac{e^{-t}-1}{t}\leqslant e^{-t}$ (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x>0) \quad -1\leqslant \frac{g(x)-\ln 2}{x}\leqslant \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$..

0,5 pt **c)** En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 .

b/

Soit $x>0$

on a $-1 \leqslant \frac{e^{-t}-1}{t} \leqslant e^{-t}$

on a $x < 2x$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} -1 \leqslant \int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_x^{2x}\frac{1}{t}dt \leqslant \int_x^{2x} -e^{-t}dt$$

$$[-t]_x^{2x} \leqslant g(x) - \ln(2) \leqslant [e^{-t}]_x^{2x}$$

$$-x \leqslant g(x) - \mathrm{Ln}(2) \leqslant e^{-2x} - e^{-x}$$

$$\Rightarrow -1 \leqslant \frac{g(x)-\mathrm{Ln}(2)}{x} \leqslant \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x} = \lim_{0^+} -e^{-x}\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$$

$$= -1$$

Exercice 5 : (3.5 pts)

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique g_n à variable réelle x définie sur l'intervalle $[n;+\infty[$ par :

$$g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction g_n est dérivable sur l'intervalle $[n;+\infty[$ puis déterminer sa fonction dérivée première $g_n^{'}$

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n;+\infty[$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \geq n)$; $g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$

(On pourra utiliser l'inégalité :$(\forall t \geq 0)$; $\ln(1+t) \leq t$)

0,25 pt **b)** En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que g_n est une bijection de l'intervalle $[n;+\infty[$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \geq 2)$ $(\exists!\ u_n \geq n)$: $\displaystyle\int_n^{u_n} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t = 1$

4 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie dans la question 3-b).

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $\displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

0,25 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 4 : (7.5 pts)

Partie I :

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$

0,5 pt **b)** En utilisant le changement de variable $u = t^2$; montrer que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$$

0,5 pt **c)** En déduire que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$.

0,25 pt **d)** Déterminer $\lim_{x \mapsto 0^+} \frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x+1) \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

0,25 pt **1 - a)** montrer que f est continue à droite en 0.

0,5 pt **b)** montrer que f est dérivable à droite en 0. (on pourra utiliser le résulta de la question I.2).

0,75 pt **c)** Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pt **2 - a)** Monter que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis vérifier que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \; : \; f'(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

.

0,25 pt **b)** En déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

0,25 pt **c)** Vérifier que $f([0;+\infty[) = [1;+\infty[$.

0,5 pt **3 -** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$. (on construira le demi tangente à droite au point d'abscisse 0)

Partie

$\int_{-x}^{-2x} \to \int_{x}^{2x}$

$u = -t$

soit $x \in]0,+\infty[$

on a :

$$\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \int_0^x \frac{t+1-1}{1+t}dt$$
$$= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$= \left[t - \ln(1+t)\right]_0^x$$
$$= x - \ln(1+x)$$

soit $x \in]0,+\infty[$

b) $u = t^2 \Leftrightarrow (u)'du = (t^2)'dt$
$\Leftrightarrow du = 2t.dt$
$\Leftrightarrow t.dt = \frac{1}{2}du$

si $t = 0$ alors $u = 0$
$t = x$ " $u = x^2$

d'où : $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$

Rappel sur changement de variable pour la parité

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+t^4}dt$$

$D_F = \mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R})$ on a $(-x \in \mathbb{R})$

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{1+t^4}dt$$

on pose $u = -t$
$du = -dt$

si $t = -x$ alors $u = x$
$t = -2x$ " $u = 2x$

D'où $F(-x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+u^4}(-du)$

$$= -\int_x^{2x} \frac{1}{1+u^4}du$$
$$= -F(x)$$

Exercice 4 : (7.5 pts)

Partie I :

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$

0,5 pt **b)** En utilisant le changement de variable $u = t^2$; montrer que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$$

0,5 pt **c)** En déduire que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$.

0,25 pt **d)** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x+1) \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0,25 pt **1 - a)** montrer que f est continue à droite en 0.

0,5 pt **b)** montrer que f est dérivable à droite en 0. (on pourra utiliser le résulta de la question I.2).

0,75 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pt **2 - a)** Monter que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis vérifier que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \ : \ f'(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

.

0,25 pt **b)** En déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

0,25 pt **c)** Vérifier que $f([0;+\infty[) = [1;+\infty[$.

0,5 pt **3 -** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$. (on construira le demi tangente à droite au point d'abscisse 0)

soit $x \in]0, +\infty[$

$0 \leq u \leq x^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{u} \leq x$

$\Leftrightarrow 1 \leq 1+\sqrt{u} \leq (1+x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+\sqrt{u}} \leq 1$

on a $0 < x^2$

$\Leftrightarrow \int_0^{x^2} \frac{1}{1+x}du \leq \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du \leq \int_0^{x^2} 1du$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \cdot [u]_0^{x^2} \leq \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du \leq [u]_0^{x^2}$

$\frac{1}{2(1+x)} \cdot (x^2) \leq \int_0^x \frac{t}{1+t}dt \leq \frac{1}{2}x^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

d/ on a $\lim \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}$ et $\lim \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

d'où $\lim \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

Exercices d'applications et de réflexions *sur* les Lois de composition interne

PROF : MHAMED DEBOURI — 2ème BAC Sciences maths

TD :Structures algébriques(partie1)

Lois de composition interne

Exercice1 : montrer on utulisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4}\}$ que l'addition et la multiplication sont des lois de compositions internes

Exercice2 : on définit sur l'ensemble $]-1;1[$ la relation T tel que : $x\mathrm{T}y = \dfrac{x+y}{1+xy}$; $\forall(x;y)\in\,]-1;1[^2$

Monter que T est une loi de composition interne Dans $]-1;1[$

Exercice3 : on considére la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calculer A^2 et A^3 et en déduire $A^n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Exercice4 : on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y = xy-3x-3y+12$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et soit : $S =]3;+\infty[$

Monter que S est une partie stable pour $(\mathbb{R};*)$

Exercice5 : 1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b = a+b-3ab$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

Monter que $*$ est commutative et associative

2) on muni $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne T définit par :

$(a;b)\mathrm{T}(x;y) = (ax;ay+b)$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Monter que T est ni commutative et ni associative dans $\mathbb{R}^2$

Exercice6 : on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b = ab-(a+b)+2$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner les élements symétrisables

Exercice7 : on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y = xy-4x-4y+20$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

1) la loi $*$ est-elle commutative ?

2) la loi $*$ admet -elle un élement neutre et determiner le s'il existe

3) determiner les élements symétrisables s'il existent

Exercice8 : on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y = x+4y-1$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

1) la loi $*$ est-elle commutative ?

2) la loi $*$ admet -elle un élement neutre et determiner le s'il existe

Exercice9 : on considére les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que : $A^2-2A+I_2=0$ et en déduire que La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

2) calculer : B^2 et B^3 et en déduire que La matrice B n'admet pas d'inverse

Exercice10 : on considére les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

1) calculer : A^2 et A^3 et en déduire que

2) Montrer que : $A^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer que : $(A-I_2)^2=0_2$ avec $0_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

4) en déduire que La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

Exercice11 : on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a&b\sqrt{2}\\b\sqrt{2}&a\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{Z}^2\text{et } a^2\text{-2b}^2=1\right\}$$

Monter que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

Exercice12 : soit l'application : $\begin{array}{l}f:(\mathbb{Z};+)\to(\mathbb{Z}^*;\times)\\x\mapsto 5^x\end{array}$

montrons que f est un morphisme de ($\mathbb{Z}$, +) dans ($\mathbb{Z}^*$, $\times$)

Exercice13 : soit l'application : $\begin{array}{l}g:]0;+\infty[\to\mathbb{R}\\x\mapsto\ln x\end{array}$

montrons que g est un morphisme de :

($]0;+\infty[$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, +)

Exercice14: soit l'application : $\begin{array}{l}h:\mathbb{C}\to\mathbb{R}\\z\mapsto|z|\end{array}$

montrons que h est un morphisme de : ($\mathbb{C}$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, $\times$)

Exercice15 : soit l'application :

$k:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$

$\theta\mapsto e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

montrons que k est un morphisme de : ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($\mathbb{C}^*$, $\times$)

Exercice16 :soit l'application : $\begin{array}{l}l:\mathbb{R}\to M_2(\mathbb{R})\\x\mapsto\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\end{array}$

montrons que l est un morphisme de : ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($M_2(\mathbb{R})$, $\times$)

Exercice17:soit f l'application : $\begin{array}{l}f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\\n\mapsto\overline{2^n}\end{array}$

montrons que f est un morphisme de ($\mathbb{N}$, $+$) dans ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\times$)

Exercice18 :on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante : $(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

Soit $A(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines :

$A(\mathbb{R};\mathbb{R})=\left\{f_{(a;b)}\ /\ \forall x\in\mathbb{R}:f_{(a;b)}(x)=ax+b\right\}$

Soit l'application : φ : $\begin{array}{l}\varphi:\mathbb{R}^2\to A(\mathbb{R};\mathbb{R})\\(a;b)\mapsto f_{(a;b)}\end{array}$

Montrer φ est un morphisme de ($\mathbb{R}^2$, $+$) dans ($A(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $+$)

Exercice19 :soient $a\in]2;+\infty[$ et $b\in]2;+\infty[$

On pose : $a*b=(a-2)(b-2)+2$

1)montrer que $*$ est une loi de composition interne Dans $I=]2;+\infty[$

2)soit l'application définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ vers I tel que : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

a) montrer que f est un morphisme de ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$) dans (I , $*$)

b) en déduire que $*$ est associative et admet un élément neutre a determiner

Exercice20 : on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=ab+(a^2-1)(b^2-1)$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ n'est pas associative

3) est ce que la loi $*$ admet un élement neutre ?

4)resoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $2*x=5$ b) $x*x=1$

Exercice21 : on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante : $(a;b)*(a';b')=(a\times a';b\times b')$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

1) Monter que $*$ est commutative et associative

2) Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner dans $\mathbb{R}^2$ les élements symétrisables Pour la loi $*$

3)soit : $S=\mathbb{R}\times\{0\}$

a)montrer que S est une partie stable de($\mathbb{R}^2$,$*$)

b) Monter que (S ,$*$) admet un élement neutre et comparer les les élements neutres de ($\mathbb{R}^2$,$*$) et de (S ,$*$)

Exercice22 : on muni $\mathbb{C}$ de la loi de composition interne T suivante : $zTz'=z\overline{z'}$; $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

$\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$ (F, T) $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

1) étudier la commutativité et l'associativité de T

2)résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(zTz)Tz=i$

Exercice23 : on muni $I=]0;+\infty[$ de la loi de composition interne $*$ suivante :

$x*y=\sqrt{x^2+y^2}$ $\forall(x;y)\in I^2$

soit f l'application définie sur I vers I

tel que : $f(x)=x^2$ $\forall x\in I$

1) montrer que : $f(x*y)=f(x)+f(y)$

2)a) montrer que $*$ est associative

b) est ce que $*$ admet un élément neutre

3)soit $a\in I$ calculer : $A=\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}$ $n\in\mathbb{N}^*$

Exercice24 : 1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=x+y-xy$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

tel que : $f(x)=1-x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

1) montrer que f est un homomorphisme bijectif De $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$

2)en déduire que $*$ est associative et que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera

3) determiner l'ensemble des élements symétrisables pour la loi $*$

4)soit $a\in\mathbb{R}$ calculer : $A=\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}$ $n\in\mathbb{N}^*$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien