Exercice2 : 1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si ${}^{a}/_{2b+c}$ et ${}^{a}/_{b+c}$ alors ${}^{a}/_{c}$

b) montrer que si ${}^{a}/_{2b+3c}$ et ${}^{a}/_{b+c}$ alors ${}^{a}/_{c}$

c) montrer que si ${}^{a}/_{x-y}$ et ${}^{a}/_{b-c}$ alors ${}^{a}/_{xb-cy}$

2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et ${}^{a}/_{12n+1}$ et ${}^{a}/_{-2n+3}$

Montrer que ${}^{a}/_{19}$

Exercice4 : Soient $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 5n + 4$
1- Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.
2- Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n

Exercice5 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$:
3 divise $4^n - 1$

Exercice6 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Exercice7 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ Représente un entier relatif ?

Exercice 17:

1- Montrer que tout diviseur commun de :
$a = 2n + 3$ et $b = 5n + 1$ est un diviseur de 13

2- Déterminer tous les diviseurs communs de a et b.

3- Déterminer les valeurs de n pour lesquels :
$a \wedge b = 13$

Exercice 18: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$
tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Exercice19 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$ montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Exercice 20:

1)En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u + 67v = 1$

Exercice 25 : 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872^{2018} par 9

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13

3) Montrer que pour tout n entier naturel :
$3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7

4) Montrer que pour tout n entier naturel,
$5n^3+n$ est divisible par 6

5) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors : n^6-1 est un multiple de 7

6 Montrer que pour tout entier naturel, le nombre $n\left(n^2+5\right)$ est divisible par 6

Exercice27: Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x=\bar{3}$ 2) $x^2+\bar{3}x=\bar{0}$ 3) $\overline{2013}x^3+\bar{2}x=\bar{k}$

Exercice28 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^2$ l'équations suivants : $x+\bar{3}y=\bar{1}$

Exercice29 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^2$ les système suivants : $\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$

EXERCICE 9

On considère dans $\mathbb{N}$ le système $(S)\begin{cases} x \equiv 5 \ [8] \\ x \equiv 2 \ [3] \end{cases}$

1) a) vérifier que $(2,-5)$ est une solution de l'équation (E) : $8X + 3Y = 1$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

2) soit (a,b) une solution de (E) .

montrer que $p = 2\times 8a + 5\times 3b$ est solution de (S)

3) soit n_0 une solution de (S)

a) montrer que :

si $x \equiv n_0 \ [24]$ alors x solution de (S)

b) déterminer les solutions de (S)

EXERCICE 6

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ et $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$

1) calculer I_0 ; I_1

2) a) montrer que $(I_n)_n$ est décroissante et convergente

b) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3) a) montrer que $(\forall x \in [0,1])$ $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{x+1} \leq \frac{1}{2}(x-1)$

b) en déduire $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice 1 : (3 pts)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \underbrace{333....31}_{n fois}$ (n fois le chiffre 3)

0,5 pt **1 -** Vérifier que les deux nombres a_1 et a_2 sont premiers.

0,5 pt **2 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

0,75 pt **3 -** Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$

0,75 pt **4 -** Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $3a_{10k+1} \equiv 0[31]$, puis en déduire que : 31 divise a_{30k+1}

a_{30k+1}

0,5 pt **5 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$;si $n \equiv 1\ [30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de

0.5 **d)** Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 : (4 pts)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \mathrm{d}t$ et $g(0) = 1$

0.5 **1 -** Montrer que la fonction g est paire.

0.75 **2 -** Montrer que la fonction $g$est dérivable sur $]0, +\infty[$. puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$

0.5 **3 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que ; pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

0.75 **b)** Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, On a : $|g(x)| \leq \frac{2}{x}$ puis déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

0.5 **4 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0) ; 0 \leq \int_x^{3x} \frac{1-\mathrm{cost}}{\mathbf{t}} \mathrm{d}t \leq \mathbf{2x}$

(Remarquer que : $(\forall \mathrm{t} > 0)$; $1 - \cos \mathbf{t} \leq \mathbf{t}$)

0.5 **b)** Vérifier que $(\forall x > 0) ; g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\mathrm{cost} - 1}{t} dt$

0.5 **c)** En déduire que : $\lim_{x\to 0^+} \mathbf{g}(x)$

Exercice 2 : (3 pts)

Partie I : Soit a un élément de **Z**.

0.5 **1 -** Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors : $a^{2016} \equiv 1[13]$.

2 - On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^{2015} \equiv 2[13]$ et x une solution de (E).

0.5 **a)** Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.5 **b)** Montrer que : $x \equiv 7[13]$

0.5 **3 -** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$

$c - a$

Exercice 2 : (3 pts)

Soit x un nombre entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

0,25 pt **1 -** Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2 - Soit d un diviseur commun de x et de 2015

0,5 pt **a)** Montrer que d divise 1436.

0,5 pt **b)** Déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

0,75 pt **3 - a)** En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que :
$x^{1440} \equiv 1[5]$ et $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$ (remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$).

0,5 pt **b)** Montrer que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ puis déduire que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$.

0,5 pt **4 -** Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$

Exercice 5 : (3.5 pts)

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique g_n à variable réelle x définie sur l'intervalle $[n; +\infty[$ par :

$$g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction g_n est dérivable sur l'intervalle $[n; +\infty[$ puis déterminer sa fonction dérivée première $g_n^{'}$

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n; +\infty[$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \geq n) \quad ; \quad g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$

(On pourra utiliser l'inégalité :$(\forall t \geq 0) \quad ; \quad \ln(1+t) \leq t$)

0,25 pt **b)** En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que g_n est une bijection de l'intervalle $[n; +\infty[$ dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \geq 2)$ $(\exists!\ u_n \geq n) \quad : \quad \int_n^{u_n} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t = 1$

4 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie dans la question 3-b).

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad ; \quad \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

0,25 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$