

3, 5p

Exercice 7 (2021-R)

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$

Soit p un nombre premier impair tel que : p divise A

1

1) a) Montrer que : $a^7 \equiv 1[p]$ en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); a^{7n} \equiv 1[p]$

1

b) Montrer que a et p sont premiers entre eux, en déduire que : $(\forall m \in \mathbb{N}); a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$

2) On suppose que 7 ne divise pas $p - 1$

0, 5

a) Montrer que : $a \equiv 1[p]$

0, 5

b) En déduire que : $p = 7$

1

3) Montrer que si p un nombre premier impair tel que : p divise A Alors : $p = 7$ ou $p \equiv 1[7]$.

4p

Exercice 8 (2021-N) On considère dans $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E) : 47x - 43y = 1$ **Partie 1**

0, 25

1) Vérifier que $(11; 12)$ est une solution de l'équation (E)

0, 75

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .

Partie 2

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(F) : x^{41} \equiv 4[43]$

1) Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F) .

0, 5

a) Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1[43]$

0, 5

b) Montrer que : $4x \equiv 1[43]$, en déduire que : $x \equiv 11[43]$

0, 5

c) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F) .

Partie 3

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant : $(S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases}$

1) Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (S)

0, 5

a) Montrer que x est une solution du système $(S') : \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases}$

0, 5

b) Déduire que : $x \equiv 527[2021]$

0, 5

2) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .

3, 5p

Exercice 9 (2020-R) Soient p et q deux premiers tq : $p < q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1[pq]$

0, 5

1) a) Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

1

b) Déduire que : $9^{p-1} \equiv 1[p]$ et que : $9^q \equiv 1[p]$

0, 5

2) a) Montrer que $p - 1$ et q sont premiers entre eux.

0, 5

b) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $p = 2$

0, 5

3) a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $9^{q-1} \equiv 1[q]$

0, 5

b) En déduire que : $q = 5$.

3, 5p	Exercice 10 (2020-N)
	On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $(D) : 7x^3 - 13y = 5$
	1) Soit (x, y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (D)
0, 5	a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.
0, 5	b) Dédire que : $x^{12} \equiv 1[13]$
1	c) Montrer que : $x^3 \equiv 10[13]$
0, 5	d) Dédire que : $x^{12} \equiv 3[13]$
1	2) Dédire des questions précédentes que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
3, 5p	Exercice 11 (2019-N)
	On admet que le nombre 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.
	Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969]$.
	1) On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n
0, 5	a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z}); u \cdot n \equiv 1[2969]$
0, 5	b) En déduire que : $(u \cdot m)^8 \equiv -1[2969]$ et que : $(u \cdot m)^{2968} \equiv -1[2969]$. (2968 = 8×371)
0, 5	c) Montrer que 2969 ne divise pas $u \cdot m$.
0, 5	d) En déduire qu'on a aussi $(u \cdot m)^{2968} \equiv 1[2969]$.
0, 5	2) a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n
0, 5	b) Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0[2969] \Leftrightarrow n \equiv 0[2969]$ et $m \equiv 0[2969]$.
3p	Exercice 12 (2018-N)
	Soit p un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
0, 5	1. Montrer que pour tout entier relatif x , si $x^2 \equiv 1[p]$ alors $x^{p-5} \equiv 1[p]$.
	2. Soit x un entier relatif x vérifiant $x^{p-5} \equiv 1[p]$.
0, 5	a) Montrer que x et p sont premier entre eux.
0, 5	b) Montrer que $x^{p-1} \equiv 1[p]$.
0, 5	c) Vérifier que $2 + (k - 1)(p - 1) = k(p - 5)$.
0, 5	d) En déduire que $x^2 \equiv 1[p]$.
0, 5	3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$.
3p	Exercice 13 (2017-N) On admet que 2017 est un nombre premier, et que : $2016 = 2^5 3^2 7$ Et soit p un nombre premier supérieur ou égale à 5.
	1) Soit $(x; y)$ un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$
0, 25	a) Vérifier que : $p < 2017$.
0, 5	b) Montrer que : p ne divise pas y .
0, 75	c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1[p]$ puis en déduire que p divise 2016 .
0, 5	d) Montrer que : $p = 7$.
1	2) Déterminer, suivant les valeurs de p , les couples $(x; y)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$

3p **Exercice 14** (2016-N)

Partie 1

	Soit $(a; b)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre premier 173 divise $a^3 + b^3$
0, 25	1) Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171}[173]$. (Remarquer que $171 = 3 \times 57$)
0, 25	2) Montrer que : 173 divise a si et seulement si 173 divise b .
0, 25	3) supposons que : 173 divise a . Montrer que 173 divise $a + b$.
	4) supposons que : 173 ne divise pas a .
0, 5	a) En appliquant le théorème de Fermat montrer que $a^{172} \equiv b^{172}[173]$.
0, 5	b) Montrer que : $a^{171}(a + b) \equiv 0[173]$.
0, 5	c) En déduire que 173 divise $a + b$.

Deuxième Partie :

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $I = [0, 1]$ par $f_n(x) = x^n \ln(2 - x)$.

1 - a) Vérifier que f_n est positive sur I et que $f_n(0) = f_n(1)$.

b) Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que : $f'_n(\alpha_n) = 0$.

2 - a) Montrer que f_n est dérivable sur I et que $\forall x \in I : f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$ où

$$g_n(x) = n \ln(2 - x) - \frac{x}{2 - x}.$$

b) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I .

c) En déduire que α_n est unique.

3 - On considère la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie.

a) Montrer que $\forall n \geq 2 : f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} \times \frac{\alpha_n^{n+1}}{2 - \alpha_n}$, en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$.

b) Montrer que $\forall n \geq 2 : g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2 - \alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

c) Montrer que $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$.

Troisième Partie :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1 - Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

2 - En utilisant une intégration, par partie, montrer que : $I_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x} dx$.

3 - Montrer que : $(\forall n \geq 2) : 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

II - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points : A , Ω , M , et M' d'affixes respectifs $a = -1 - i$, $\omega = i$, m et $m' = -im - 1 + i$.

1 - Soit R la rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et qui transforme M en M' .

a) Vérifier que Ω est le centre de la rotation R .

b) Déterminer l'axe b du point B tel que $A = R(B)$

2 - a) Vérifier que $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$.

b) En déduire que les points A , M et M' sont alignés si et seulement si les points A , B , Ω et M sont cocycliques.

c) Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A , M et M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 4 : (7.5 pts)

Partie I :

1 - a) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) : \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = x - \ln(1+x)$

b) En utilisant le changement de variable $u = t^2$; montrer que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) : \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}} du$$

c) En déduire que $(\forall x \in]0; +\infty[) : \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$.

d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(x+1) & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - a) montrer que f est continue à droite en 0.

b) montrer que f est dérivable à droite en 0. (on pourra utiliser le résultat de la question I.2).

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2 - a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, puis vérifier que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

c) Vérifier que $f([0; +\infty[) = [1; +\infty[$.

3 - Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$. (on construira la demi tangente à droite au point d'abscisse 0)

Exercice 4 : Problème (11 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 - a) Montrer que f est continue à droite en 0.

(On pourra remarquer que : $f(x) = \left(4x^{\frac{1}{4}} \ln(x^{\frac{1}{4}})\right)^2$)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2 - a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

c) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$, en déduire que :

$$(\forall x \in [0, 1]); 0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$$

d) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(On prendra pour unité $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$)

3 - Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

a) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

b) Calculer $F'(x)$ pour $x \geq 0$, en déduire le sens de variation de F sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4 - a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer $\int_a^1 \sqrt{t}(\ln t)dt$ pour tout $x > 0$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$

$$F(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$$

165/346

MTMgroup

38/122

MAROC

Examen du Baccalauréat

Session Rattrapage 2018

c) En déduire en m^2 , l'aire du domaine limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ et $y = 0$.

5 - Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée et strictement monotone.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.