Chute verticale d'un corps solide

I- Chute libre verticale :

1) Définition :

Un solide est en chute libre lorsqu'il n'est pas soumis qu'à l'action de son poids.

⟹Cette chute n'est réalisable que si le solide se trouve dans le vide.

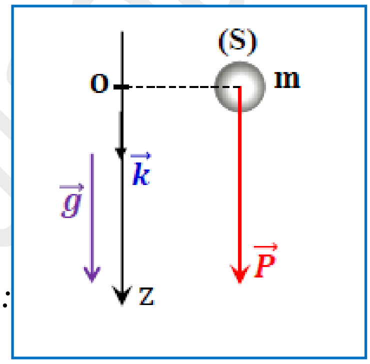
2) Equations du mouvement :

Selon la définition de la chute libre et en appliquant la deuxième loi de Newton, on écrit : $\vec{P} = m.\vec{a}_G$

$\Rightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a}_G$

D'où : $\vec{a}_G = \vec{g}$

⟹ Dans le vide et en un même lieu, tous les corps ont même mouvement de chute libre.



- Par projection sur l'axe Oz orienté vers le bas, on obtient :
  - ✓ $a_G = g = Cte$: équation de l'accélération ;
  - ✓ $v_G(t) = g.t + V_o$: équation de la vitesse ;
  - ✓ $z_G(t) = \frac{1}{2}g.t^2 + V_o.t + z_o$: équation horaire du mouvement ;

V_0 et z_0 seront déterminées à partir des conditions initiales.

II- Chute verticale avec frottement :

1) Forces exercée par un fluide:

a- La poussée d'Archimède :

Un solide immergé dans un fluide est soumise de la part de celui-ci à une action mécanique appelée poussée d'Archimède.

La poussée d'Archimède est modélisée par une force verticale, dirigée vers le haut. Sa valeur est égale au poids du volume du fluide déplacé :

$$\boxed{\vec{F_A} = -\vec{P_f} = -m_f.\vec{g} = -\rho_f.V.\vec{g}}$$

*) Caractéristiques de la poussée d'Archimède :

- Point d'action : Le centre d'inertie G du corps étudie (le corps est totalement immergé dans le fluide)
- Ligne d'action : La verticale passant par G
- Sens : Vers le haut

- *Intensité :* $F_A = P_f = m_f.g = \rho_f.V.g$

Avec :

P_f : *l'intensité du poids du fluide déplacé ;*

m_f : *masse du fluide déplacé ;*

ρ_f : *la masse volumique du fluide ;*

V : *volume du fluide déplacé = volume du corps immergé .*

Remarque :

On a : $F_A = m_f.g = \rho_f.V.g$ *et* $P_s = m_s.g = \rho_s.V.g$; *avec :*

P_s *est le poids du corps immergé et* ρ_s *sa masse volumique.*

$\Rightarrow \frac{F_A}{P_s} = \frac{\rho_f.V.g}{\rho_s.V.g} = \frac{\rho_f}{\rho_s}$

Si $\rho_f \ll \rho_s$, *alors* $F_A \ll P_s$: *On trouve ce cas lorsque le fluide est un gaz.*

b- Force de frottement fluide:

Un solide en mouvement dans un fluide est soumis, de la part de ce fluide, d'une force opposée au mouvement du solide appelée force de frottement fluide, définit par :

$$\boxed{\vec{f} = -k.\overrightarrow{v_G^n}}$$

**) Caractéristiques de la force de frottement fluide:*

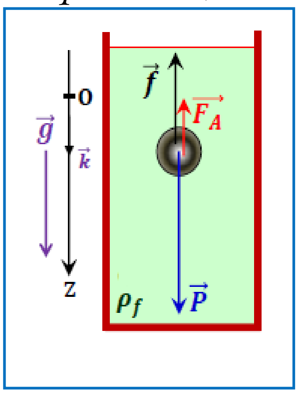
- *Point d'action :* Le centre d'inertie G du corps étudie
- *Ligne d'action :* La direction du vecteur vitesse $\overrightarrow{v_G}$.
- *Sens :* Inverse de celui de $\overrightarrow{v_G}$.
- *Intensité :* $f = k.v_G^n$

Avec :

k : Constante qui dépend de la nature du fluide et de la forme du corps solide ;

n : Un entier qui prend la valeur 1 ou 2.

2) Etude théorique :



On étudie la chute verticale d'une bille d'acier dans un liquide au repos dans un repère terrestre supposé galiléen.

Son axe $(O,\vec{k})$ *est vertical et orienté vers le bas.*

→*Bilan de forces :*

**) Le système étudie :* {la bille}.

- $\vec{P}$: *le poids ;*

- $\vec{F}_A$: *la poussée d'Archimède ;*
- $\vec{f}$: *la force de frottement fluide ;*

→*Appliquant la deuxième loi de Newton :*

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$\Longrightarrow \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m.\vec{a}_G$;

Soit : $m.\vec{g} - m_f.\vec{g} - k.\overrightarrow{v_G^n} = m.\vec{a}_G$

$m.g.\vec{k} - m_f.g.\vec{k} - k.v_G^n.\vec{k} = m.a_G.\vec{k}$

→ *Projection sur l'axe* $(O,\vec{k})$:

$m.g - m_f.g - k.v_G^n = m.a_G$

$\Longrightarrow (m - m_f).g - k.v_G^n = m.a_G$

$c.\text{à}.d: a_G = \dfrac{(m-m_f)}{m}.g - \dfrac{k}{m}.v_G^n$

Qui peut s'écrire sous la forme :

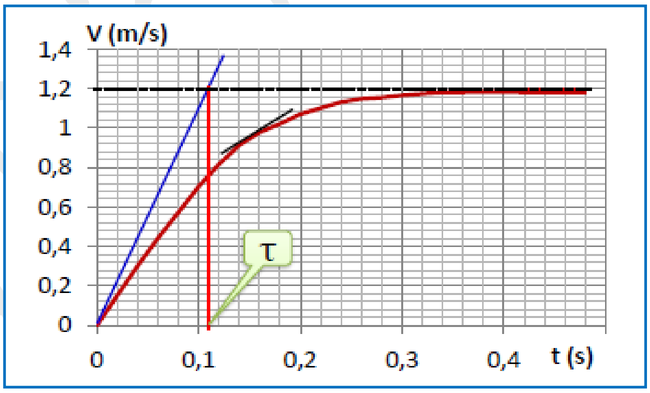
$$\boxed{\frac{dv_G}{dt} = A - B.v_G^n}$$

Avec : $A = \frac{(m-m_f)}{m}.g$ *et* $B = \frac{k}{m}$

C'est l'équation différentielle du mouvement

3) Les grandeurs caractéristiques du mouvement :

L'étude expérimentale montre que la vitesse du centre d'inertie de la bille est de la forme ;



a- Le régime permanent : Vitesse limite V_{lim}.

La vitesse limite V_{lim} *est la vitesse maximale du centre d'inertie G de la bille*

- *Graphiquement :*

On détermine la valeur de V_{lim} *par l'intersection, de la courbe de* $v_G = f(t)$ *en régime permanent avec l'axe des ordonnées (axe de vitesse)*

- *Théoriquement :*

L'expression de V_{lim} est déterminée en utilisant l'équation différentielle en régime permanent ;

En régime permanent, on a : $v_G = V_{lim} = Cte \Longrightarrow \frac{dv_G}{dt} = 0$

Donc, d'après d'équation différentielle : $A - B.V_{lim}^n = 0$ d'où : $V_{lim} = (\frac{A}{B})^{\frac{1}{n}}$

Ou bien : $V_{lim} = (\frac{g}{k}(m - m_f)^{\frac{1}{n}}$ soit aussi : $V_{lim} = (\frac{g}{k}(\rho - \rho_f)^{\frac{1}{n}}$

$\Longrightarrow$ Cette dernière expression montre que V_{lim} dépend des masses volumiques de la bille et du liquide.

b- Le régime initial : l'accélération initiale a_0 :

- *Graphiquement :*

La valeur de a_0 est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe $v_G = f(t)$ à l'instant $t = 0$: $a_0 = \frac{V_{lim}}{\tau}$; τ : Le temps caractéristique du mouvement.

- *Théoriquement :*

On détermine l'expression de a_0 à partir de l'équation différentielle du mouvement :

$$a_0 = A - B.v_0^n$$

A l'instant $t = 0$, on a la force de frottement fluide $\vec{f}$ est nulle ($\vec{f} = -k.\overrightarrow{v_0^n} = \vec{0}$), donc : $v_0^n = 0$, d'où :

$$a_0 = A = \frac{(m - m_f)}{m}.g$$

4) Résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler :

La méthode d'Euler permet de résoudre numériquement l'équation différentielle du mouvement ;

- Pour utiliser cette méthode il faut connaître la vitesse v_G à un instant t donné ;
- Généralement c'est la vitesse initiale v_0 à l'instant t_0 qui est connue.
- La connaissance de v_0 permet de connaître l'accélération initiale a_0 en utilisant l'équation différentielle du mouvement :

  $$a_0 = A - B.v_0^n$$

- La connaissance de a_0 permet de connaître la vitesse v_1 à un instant $t_1 = t_0 + \Delta t$, en effet :

  $$a_0 = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} \Longrightarrow v_1 = v_0 + a_0.\Delta t$$

  Δt : est appelée le pas de calcul.

- *La connaissance de v_1 permet de connaître l'accélération initiale a_1 en utilisant l'équation différentielle du mouvement :*

$$a_1 = A - B.v_1^n$$

- ....

$t_i(s)$	$v_i(m.s^{-1})$	$a_i(m.s^{-2})$
t_0	v_0	$a_0 = A - B.v_0^n$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0.\Delta t$	$a_1 = A - B.v_1^n$
...	...	...
$t_{i+1} = t_i + \Delta t$	$v_{i+1} = v_i + a_i.\Delta t$	$a_{i+1} = A - B.v_{i+1}^n$

Application n°1 : Exercice n° 1 ; Série n°10

الصفحة 7 / 8	NS 30F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 – الموضوع - مادة: الفيزياء والكيمياء- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	

Exercice 4 : Mécanique(3,25 points)

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I : Etude du mouvement d'un skieur

On étudie dans cette partie le mouvement d'un skieur sur un plan incliné dans deux cas :

- **Premier cas** : la force de frottement fluide exercée par l'air est négligeable,

- **Deuxième cas** : la force de frottement fluide exercée par l'air n'est pas négligeable.

Un skieur glisse sur une piste plane inclinée d'un angle $\alpha = 45°$ par rapport au plan horizontal, selon la ligne de plus grande pente (Figure 1).
On modélise le skieur et ses accessoires par un système solide (S) de masse $m = 75\,kg$ et de centre d'inertie G.

On étudie le mouvement de G dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.
A l'instant $t = 0$, le skieur part sans vitesse initiale. A cet instant, G coïncide avec l'origine O du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (Figure 1).

On prendra l'accélération de la pesanteur : $g = 10\ m.s^{-2}$ et on négligera la poussée d'Archimède.

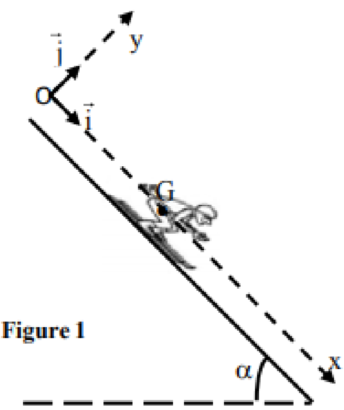


Figure 1

1- Premier cas :Mouvement du skieur sans frottement fluide

Le contact entre le plan incliné et le système (S) se fait avec frottement solide. La piste exerce sur le skieur une force $\vec{R}$ ayant une composante tangentielle $\vec{T}$ et une composante normale $\vec{N}$. Lors du mouvement du skieur, les intensités de $\vec{T}$ et de $\vec{N}$ sont liées par la relation $T = k.N$ avec k une constante.

1-1- En appliquant la deuxième loi de Newton, exprimer l'accélération du mouvement de G en fonction de g , α et k .**(0,5pt)**

1-2- La courbe de la figure 2, représente la variation de la vitesse v du centre d'inertie G en fonction du temps.

Déterminer graphiquement l'accélération du mouvement. **(0,25pt)**

1-3-Vérifier que $k \simeq 0,9$.**(0,25pt)**

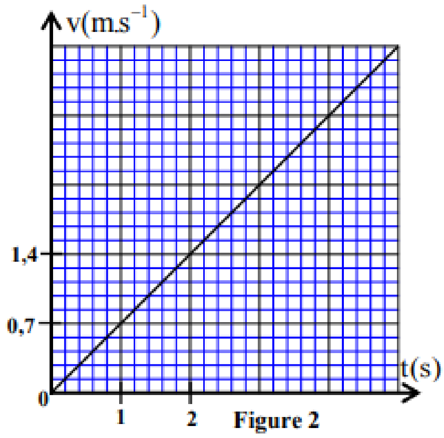


Figure 2

2- Deuxième cas :Mouvement du skieur avec frottement fluide

En plus des mêmes forces exercées sur (S) dans le premier cas, (S) est soumis à des frottements fluides dûs à l'air que l'on modélise par la force $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$, où v est la vitesse du centre d'inertie G à un instant t et λ une constante positive de valeur $\lambda = 5$ S.I. .

2-1- En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle du mouvement de G s'écrit : $\frac{dv}{dt} + A.v + B = 0$ avec $\vec{v} = v\vec{i}$ et A et B deux constantes.**(0,5pt)**

2-2-Déterminer la valeur de la vitesse limite v_ℓ du mouvement.**(0,25pt)**

2-3-En s'aidant du tableau ci-contre et en utilisant la méthode d'Euler, déterminer la vitesse v_2 du mouvement de (S).(le pas de calcul est $\Delta t = t_2 - t_1$) .**(0,5pt)**

t(s)	$v(m.s^{-1})$	$a_G(m.s^{-2})$
$t_1 = 14$	$v_1 = 6,30$	a_1
$t_2 = 15,4$	v_2	a_2

Réponse :

....

Application n°2 : Exercice n° 2 ; Série n°10

Exercice 3 : Mécanique (4,75 points)

Les deux parties I et II sont indépendantes

Partie I :Etude du mouvement d'un corps solide dans l'air et dans un liquide

On trouve dans les piscines des plongeoirs à partir desquels chutent les baigneurs pour plonger dans l'eau.

Dans cette partie de l'exercice, on étudiera le mouvement d'un baigneur dans l'air et dans l'eau.

On modélise le baigneur par un corps solide (S) de masse m et de centre d'inertie G .

On étudie le mouvement du centre G dans un repère $R(O,\vec{k})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen(figure1).

Données : $m=80kg$; intensité de la pesanteur : $g=10m.s^{-2}$. On prend $\sqrt{2}=1,4$.

1- Etude du mouvement du centre G dans l'air

A l'instant de date t_0, pris comme origine des dates $(t_0=0)$, le baigneur se laisse chuter sans vitesse initiale d'un plongeoir. On considère qu'il est en chute libre durant son mouvement dans l'air. A la date t_0 le centre d'inertie G coïncide avec l'origine O du repère $R(O,\vec{k})$ $(z_G=0)$ et est situé à une hauteur $h=10m$ au dessus de la surface de l'eau(figure 1).

0,25 **1-1**-Etablir l'équation différentielle régissant la vitesse v_z du centre d'inertie G .

0,5 **1-2** -Déterminer le temps de chute t_c de G dans l'air puis en déduire sa vitesse v_e d'entrée dans l'eau.

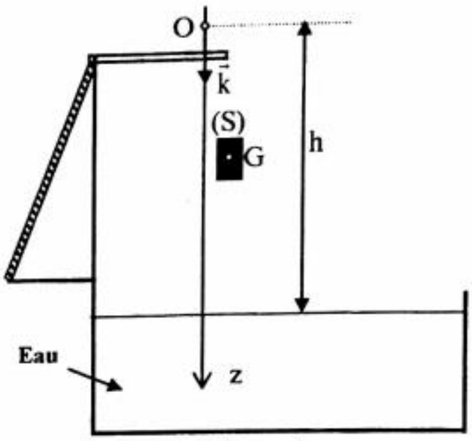


Figure 1

2- Etude du mouvement vertical du centre d'inertie G dans l'eau

Le baigneur arrive avec la vitesse $\overline{v_e}$, de direction verticale, à l'entrée dans l'eau. Lorsqu'il est dans l'eau, il suit une trajectoire verticale où il est soumis à l'action de:

- son poids $\vec{P}$,
- la force de frottement fluide : $\vec{f}=-\lambda.\vec{v}$ où λ est le coefficient de frottement fluide($\lambda=250kg.s^{-1}$) et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de G à un instant t ,
- la poussée d'Archimède : $\vec{F}=-\frac{m}{d}.\vec{g}$ où g est l'intensité de la pesanteur et $d=0,9$ la densité du baigneur.

On considère l'instant d'entrée de (S) dans l'eau comme nouvelle origine des dates($t=0$).

0,5	**2-1-**Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v_z de G . On posera $\tau=\frac{m}{\lambda}$.
0,5	**2-2-** Déduire l'expression de la vitesse limite $v_{\ell z}$ en fonction de τ, g , et d .Calculer sa valeur.
0,5	**2-3-** La solution de l'équation différentielle est $v_z(t)=A+Be^{-\frac{t}{\tau}}$, où A et B sont des constantes . Exprimer A en fonction de $v_{\ell z}$ et B en fonction de $v_{\ell z}$ et v_e .
0,25	**2-4-**Déterminer l'instant t_r auquel le mouvement du baigneur change de sens.(Le baigneur n'atteint pas le fond de la piscine).

Réponse :

Application n°③ : Exercice n° ③ ; Série n°⑩

الصفحة 6 / 8 | NS31F | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2016 - الموضوع
- مادة: الفيزياء والكيمياء – مسلك العلوم الرياضية (أ) و (ب) – المسالك الدولية (خيار فرنسية)

Mécanique(5,5points) : **Les parties I et II sont indépendantes**

PartieI : Etude de la chute de deux boules dans l'air

Galilée, homme de sciences italien, s'intéressa à l'étude de la chute de divers corps. Selon la légende , il aurait effectué cette étude en lâchant ces corps du sommet de la tour de Pise.
Pour vérifier certains résultats avancés par Galilée, on se propose d'étudier dans cette partie la chute dans l'air de deux boules ayant le même rayon et des masses volumiques différentes .
L'étude du mouvement de chaque boule s'effectue dans un repère $R(O,\vec{k})$ associé à un référentiel terrestre supposé galiléen. On repère, à chaque instant, la position du centre d'inertie de chacune des deux boules par la côte z sur l'axe vertical $(O,\vec{k})$ orienté vers le haut et dont l'origine est prise au niveau du sol (figure 1).
Chaque boule est soumise, durant sa chute, à son poids $\vec{P}$ et à la force de frottement fluide $\vec{f}$ (On néglige la poussée d'Archimède devant ces deux forces).
On admet que l'intensité de la force f s'écrit : $f = 0,22.\rho_{air}.\pi.R^2.v_z^2$ où ρ_{air} est la masse volumique de l'air , R le rayon de la boule et v_z la valeur algébrique de la vitesse du centre d'inertie G de la boule à un instant t .

Données :

- Le volume d'une boule de rayon R est $V = \frac{4}{3}.\pi.R^3$,
- L'intensité de la pesanteur $g = 9,8\,m.s^{-2}$,
- La masse volumique de l'air $\rho_{air} = 1,3\,kg.m^{-3}$.

Cette étude est effectuée avec deux boules (a) et (b) homogènes ayant le même rayon $R = 6\,cm$ et des masses volumiques respectives $\rho_1 = 1,14.10^4\,kg.m^{-3}$ et $\rho_2 = 94\,kg.m^{-3}$.
Les deux boules sont lâchées au même instant $t = 0$, sans vitesse initiale, du même plan horizontal auquel appartient le point H. Ce plan est situé à une hauteur $h = 69\,m$ du sol (figure 1).

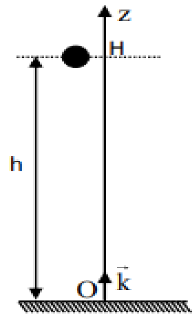
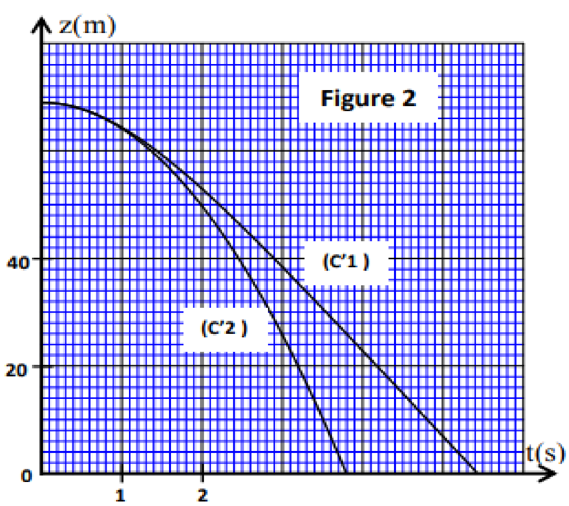


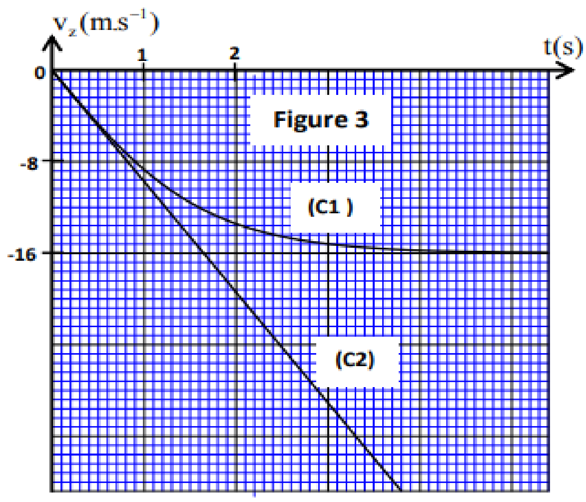
Figure 1

0,5 **1**-Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v_z du centre d'inertie d'une boule s'écrit : $\frac{dv_z}{dt} = -g + 0,165.\frac{\rho_{air}}{R.\rho_i}.v_z^2$, où ρ_i désigne la masse volumique de la boule (a) ou (b) .

0,5 **2**-Déduire l'expression de la vitesse limite du mouvement d'une boule .

3-Les courbes obtenues sur les figures 2 et 3 représentent l'évolution de la côte $z(t)$ et de la vitesse $v_z(t)$ du centre d'inertie G de chacune des deux boules, au cours de la chute.





0,25	**3-1-** Montrer, à l'aide de l'expression de la vitesse limite, que la courbe **(C1)** correspond aux variations de la vitesse de la boule (b).
0,25	**3-2-**Expliquer pourquoi la courbe **(C'2)** correspond aux variations de la côte de la boule (a).
0,75	**4-**Déterminer, à l'aide de la courbe **(C2)**, la nature du mouvement de la boule (a) et écrire son équation horaire $z(t)$.
0,25	**5-** Déterminer la différence d'altitude d entre les centres d'inertie des deux boules à l'instant où la première boule touche le sol (On néglige les dimensions des deux boules).
0,75	**6-** Sachant que la valeur algébrique de la vitesse de la boule (b) à l'instant de date t_n est $v_{zn} = -11,47\,m.s^{-1}$, trouver, en utilisant la méthode d'Euler, la valeur de l'accélération a_{zn} du mouvement à l'instant de date t_n et la vitesse $v_{z(n+1)}$ à l'instant de date t_{n+1}. On prend le pas du calcul $\Delta t = 125\,ms$.

Réponse :