Niveau:2BACPC

$$\int_{PC}^{BAC} dx$$

Exercice N°1

Calculer les intégrales suivantes:

1. $A = \int_1^5 \left(x^2 + x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$
2. $B = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{2x-1}$
3. $C = \int_{-4}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$
4. $D = \int_1^5 \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$
5. $E = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1} \mathrm{d}x$
6. $F = \int_1^6 \sqrt{x+3}\, \mathrm{d}x$
7. $G = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} \mathrm{d}x$
8. $H = \int_0^1 x e^{x^2} \mathrm{d}x$
9. $D = \int_0^{\frac{1}{2}} -e^{x+3} dx$
10. $K = \int_0^3 \frac{2x+1}{x^2+x+1} \mathrm{d}x$
11. $L = \int_3^4 \frac{x^3 - 4x^2 + x + 1}{x^2} \mathrm{d}x$
12. $M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, \mathrm{d}x$

Exercice N°2

1. Soit f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0;5]$ telles que

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -3 \quad ; \quad \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 4 \quad ; \quad \int_0^5 g(x)\mathrm{d}x = 3$$

Calculer

$$\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^5 [2f(x) - 5g(x)]\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_2^0 f(x)\mathrm{d}x$$

2. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[-2;7]$ telle que

$$\int_{-2}^7 f(x)\mathrm{d}x = 5 \quad ; \quad \int_4^7 f(x)\mathrm{d}x = -1$$

Calculer $\int_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x$.

3. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0;1]$ telle que pour tout $x \in [0;1]$ on a $x^2 \leqslant f(x) \leqslant x$.

Donner un encadrement de $\mathbf{I} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice N°4

En utilisant la formule d'intégration par parties calculer les intégrales

1. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$
2. $J = \int_0^1 x^2 e^x dx$
3. $M = \int_0^1 \left(-2x^2 + x + 1\right) e^x dx$
4. $I = \int_1^2 x\sqrt{2x+1}dx$
5. $P = \int_0^1 (x+1)\sqrt{2x+1}dx$
6. $T = \int_1^e \ln t dt$
7. $S = \int_e^{2e} x \ln x^2 dx$ $P = \int_1^2 x \ln x dx$
8. $C = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x}dx$
9. $H = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$
10. $F = \int_1^e (t^2+3) \ln t dt$
11. $I = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$
12. $H = \int_0^1 t^2 e^t dt$
13. J= $\int_0^{\pi} (3t^2 - t + 1) \sin t dt$
14. $R = \int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$
15. $V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin^2(3x)dx$
16. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2x)dx$
17. $J = \int_0^1 (x+2)e^x dx$
18. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x dx$

Exercice N°5

Soient la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 7}{(x+2)^2}$

1. Trouver les réels **a**; b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x+2)^2}$
2. En déduire $I = \int_2^3 f(x)dx$.

Exercice N°6

Soit Soient la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$

1. Trouver les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{(x+1)^2}$
2. En déduire $I = \int_1^2 f(x)dx$.

Exercice N°11

On se propose de trouver sans les calculer séparément les trois intégrales

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx ; K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\cos^2 x dx$$

1. Calculer $I-J$ et $I+J+K$.
2. Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. En déduire la valeur de $I+J-3K$ puis celles de $I; J; K$.

Exercice N°12

On considère les intégrales définies $I=\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ et $J=\int_0^{\pi} \sin^4 x dx$.

1.
   - a. Montrer que l'intégrale I peut s'écrire : $I=\int_0^{\pi} \cos x\left(\cos x-\cos x\sin^2 x\right) dx$
   - b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I=\int_0^{\pi} \sin^2 x dx-\frac{1}{3}J$.
   - c. Montrer aussi que l'intégrale J peut s'écrire : $J=\int_0^{\pi} \cos^2 x dx-\frac{1}{3}I$.
2.
   - a. Montrer que $I+J=\frac{3\pi}{4}$
   - b. Montrer que $J-I=0$
   - c. En déduire les valeurs des intégrales I et J.

Exercice N°13

Soit les deux intégrales définies par : $I=\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x dx$ et $J=\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x dx$.

1. Calculer $I+J$.
2.
   - a. Montrer que $J-I=\int_{\pi}^{0} e^x\cos ax dx$ où a est un réel à déterminer.
   - b. A l'aide d'une double intégration par parties, démontrer que $J=\frac{1}{5}\left(1-e^{\pi}\right)$.
3. Déterminer les valeurs exactes de I et de J.

Exercice N°14

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : $\forall t\in\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\left(1+e^{1-2t}\right)^2}=a+\frac{be^{1-2t}}{1+e^{1-2t}}+\frac{ce^{1-2t}}{\left(1+e^{1-2t}\right)^2}$$

2. Calculer alors l'intégrale $J=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(1+e^{1-2t}\right)^2}$.
3. On pose $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{te^{1-2t}}{\left(1+e^{1-2t}\right)^3} dt$.
   - a. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I en fonction de J.

Exercice N°15

L'objectf est de calculer les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et

$$K = \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+2}\right) dx$$

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$, où ln désigne le logarithme népérien.
   - a. Montrer que f est une primitive de la fonction, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ sur $[0;1]$.
   - b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.
2. a. Sans calculer explicitement J et K, montrer que $K = J + 2I$.
   - b. A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
3. Déduire des questions précédentes, les valeurs exactes de J et K.

Exercice N°16

Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$. On se propose de calculer : $I(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)dx$, où $\lambda \in \mathbb{R}^+$

1. Quel est le signe $I(\lambda)$?
2. Trouver deux nombres réels a et b tels que pour tout réel x, $\frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x}$
3. Calculer $J(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x}dx$
4. f' étant la fonction dérivée de f, calculer $f + f'$
5. Calculer $I(\lambda)$.

Exercice N°17

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^x-1)}{e^x}$. Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 2$.

On pose $I(\alpha) = \int_{\ln 2}^{\ln\alpha} f(x)dx$.

1. a. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{e^x}{e^x-1}$.
   - b. En déduire une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{e^x-1}$. On remarquera que $\frac{e^x}{e^x-1} = 1 + \frac{1}{e^x-1}$
2. a. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) + f(x) = \frac{1}{e^x-1}$

Exercice N°18

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[-a;a]$ et F une primitive de f sur $[-a;a]$.

On

1. suppose f est impaire.

   On définit la fonction h par : pour tout $x \in [-a;a], h(x) = F(x) - F(-x)$

   a. Étudier les variations de h.

   b. En déduire que F est paire.

   c. En déduire que $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$

2. On suppose f est paire.

   a. Prouver que, pour tout x de $[-a;a]$, $F(-x) = -F(x) + 2F(0)$.

   b. En déduire que $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

   c. Interpréter graphiquement ces résultats.

3. Soient f et g les fonctions définies sur $[-1;1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$.

   a. Étudier la parité et les variations de f et de g.

   b. Tracer leurs courbes représentatives.

   c. Calculer

   $$\int_{-1}^{1} \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x, \int_{-1}^{1} \left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{0}^{1} \left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x$$

   d. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

Exercice N°19

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_{0}^{1} \ln(1 + x^n)\, dx$.

   a. Montrer que: $I_1 = 2\ln 2 - 1$.

   b. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 \leq I_n \leq \ln 2$

   c. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   d. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. est convergente.