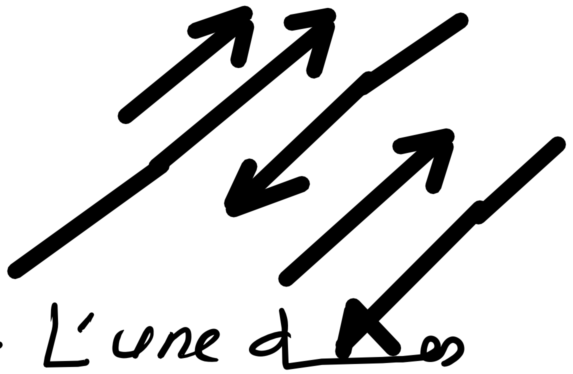
la geometrie dans L'espace
(Etude analythique)

→ $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ colineaires

$\iff \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$

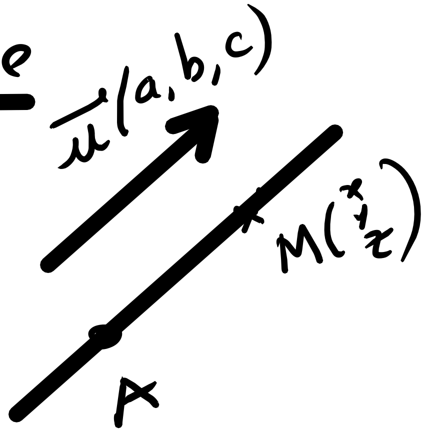


→ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaire $\iff$ L'une des 3 determinants est $\neq 0$

→ **une representation paramétrique**

$M \in (D) \iff \vec{AM} = t\vec{u}$

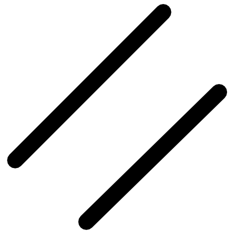
$$(D) : \begin{cases} x = x_A + a \cdot t \\ y = y_A + b \cdot t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + c \cdot t \end{cases}$$



↓ $\vec{u}(0,1,3)$

$A(1,2,4)$

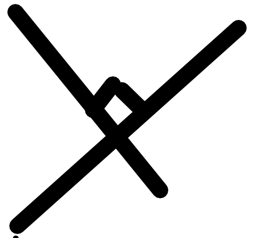
→ $(D) // (D') \iff \vec{u_D}$ et $\vec{u_{D'}}$ colineaires



→ $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$

le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

→ $(D) \perp (D') \iff \vec{u_D} \cdot \vec{u_{D'}} = 0$



→ équation cartesienne d'une droite

- si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$

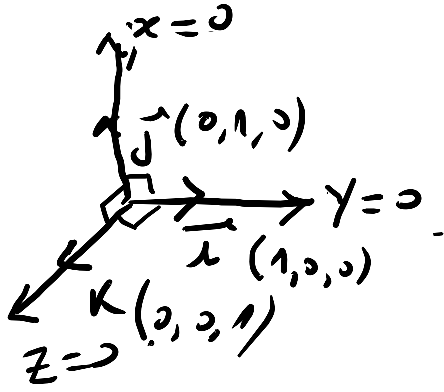
$$(D) : \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$$

- si $a = 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$ $\Longrightarrow \begin{cases} x - x_A = 0 \\ \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c} \end{cases}$

$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 4}{3} \end{cases}$

$\vec{u}(a,0,0)$

$\vec{u}(1,0,0)$

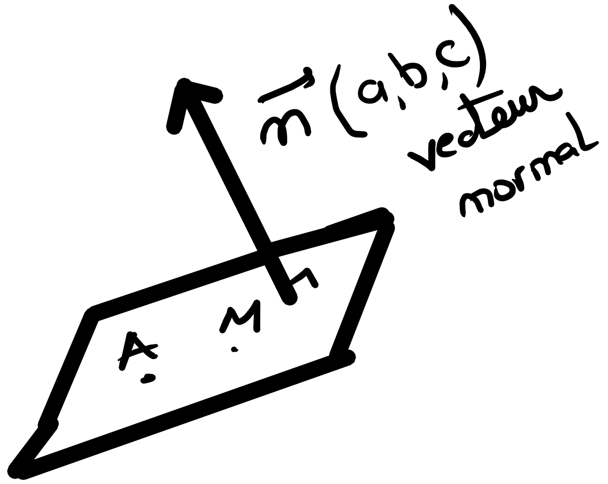


$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x-x_A = ta \longrightarrow t = \dfrac{x-x_A}{a} \\ y-y_A = tb \longrightarrow t = \dfrac{y-y_A}{b} \\ z-z_A = tc \longrightarrow t = \dfrac{z-z_A}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c} = t$$

le plan dans l'espace



une équation cartésienne du plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$

s'écrit $ax + by + cz + d = 0$

Exemple : (P) passe par le point $A(2,4,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(5,3,-2)$

On a $\vec{n}(5,3,-2)$ vecteur normal à (P)

donc : L'équation de (P) s'écrit sous la forme

$$5x + 3y - 2z + d = 0$$

comme $A(2,4,1) \in (P)$

$$\iff 5\times 2 + 3\times 4 - 2\times 1 + d = 0$$

$$\iff d = -20$$

donc : $(P) : 5x + 3y - 2z + d = 0$

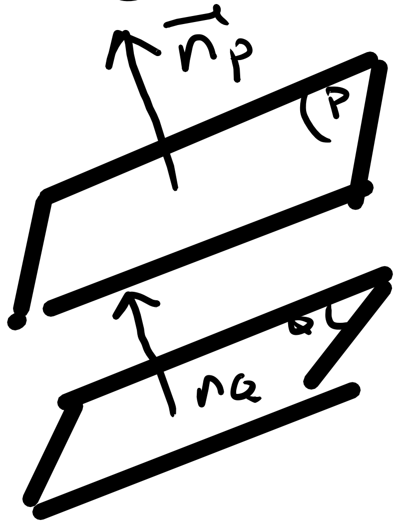
Méthode

$$M \in (P) \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0 \end{cases}$$

→ (P) // (Q) $\Longleftrightarrow$ $\vec{n}_P$ et $\vec{n}_Q$ colinéaire

→ (P) ⊥ (Q) $\Longleftrightarrow$ $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$



$$\rightarrow \; d(\Omega,(P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exemple :

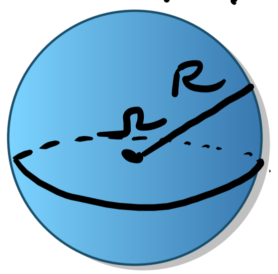
(P) : $2x + 3y - z + 1 = 0$

$\Omega(1,-2,2)$

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|2\times1 + 3(-2) - 2 + 1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

→ la sphère

$$M \in \mathcal{S}(\Omega, R) \Longleftrightarrow (x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 + (z-z_\Omega)^2 = R^2$$



(S) : $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-1=0$

Déterminer le centre et le rayon de la sphère

(S) : $(x^2-2x) + (y^2-4y) + (z^2-2z) - 1 = 0$

$\Longleftrightarrow (x^2-2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4+(z^2-2z+1)-1-1=$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 7 = \sqrt{7}^2$

le centre est $\Omega(1,2,1)$ et $R=\sqrt{7}$

Exercice 1 R2024

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les deux points $A\,(1, 1, 0)$ et $\Omega\,(-1, 1, -2)$ et le plan (P) d'équation $x + z - 1 = 0$

1. a. Vérifier que A est un point du plan (P) et donner un vecteur normal de (P).

   b. Montrer que la droite (ΩA) est perpendiculaire au plan (P).

2. Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant :
   $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$

   a. Montrer que (S) est une sphère de centre Ω et déterminer son rayon.

   b. Montrer que (P) coupe (S) suivant un cercle de centre A puis déterminer son rayon.

3. Soit (Q_m) un plan d'équation $x + y + mz - 2 = 0$, où m est un nombre réel.

   a. Vérifier que A est un point du plan (Q_m), pour tout m de $\mathbb{R}$

   b. Déterminer la valeur du réel m pour que (Q_m) soit perpendiculaire au plan (P)

   c. Existe-t-il un plan (Q_m) qui coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre A? Justifier.

Exercice 2 N2024

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5

1. Montrer que $2x-2y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (P)
2. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)
3. a. Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega,(P))=3$

   b. En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.
4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

   b. Montrer que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ)

   c. Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

1)

on a : $\vec{n}(2,-2,1)$ est un vecteur normal à (P)

donc l'équation du plan (P) est :

$$2x-2y+1z+d=0$$

et comme $A(-1,0,1)\in(P)$

donc $2(-1)-2\times 0+1(1)+d=0$

$\Rightarrow d=3$.

D'où $(P) : 2x-2y+z+3=0$

2ème Method

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(P) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+1\\y-0\\z+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 2(x+1)-2y+(z+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x-2y+z+3=0$

Exercice 2 N2024

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5

1. Montrer que $2x-2y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (P)
2. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)
3. a. Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega,(P))=3$
   b. En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.
4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)
   b. Montrer que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ)
   c. Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

② $\Omega M^2 = R^2$

$M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+z^2=25$

avec fa $\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2=25$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2-4x+2y-20=0}$

③ $(P): 2x-2y+z+3=0$ et $\Omega(2,-1,0)$

$d(\Omega, P) = \dfrac{|2x_\Omega-2y_\Omega+z_\Omega+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{9}{3} = 3.$

Exercice 2 N2024

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5

1. Montrer que $2x-2y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (P)
2. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)
3. a. Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega,(P))=3$

   b. En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.
4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

   b. Montrer que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ)

   c. Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

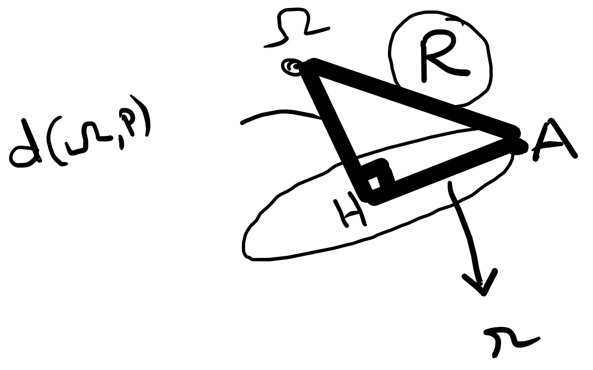
- Medecin -
- En. Ens .
, ES .

b)

On a $d(\Omega,(P)) = 3$ et $R = 5$

donc $d(\Omega,(P)) < R$

d'où (P) coupe la sphère un cercle .



$A\Omega^2 = AH^2 + \Omega H^2$

$AH = \sqrt{A\Omega^2 - \Omega H^2}$

$\boxed{r = \sqrt{R^2 - d^2}}$

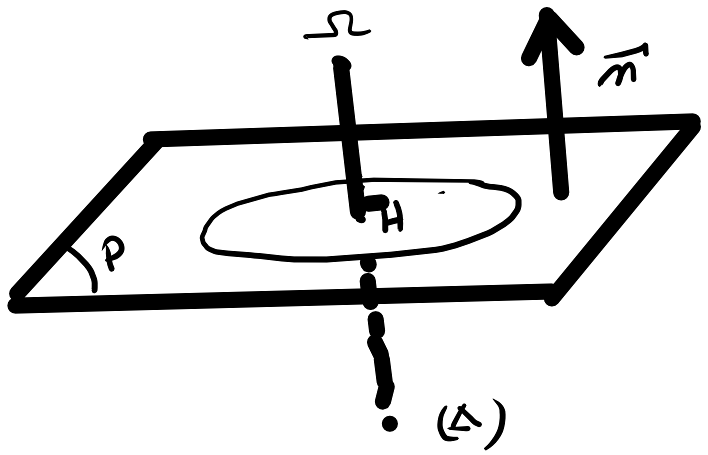
Abdellah Faqaul
Seddik IBN Khaldoun

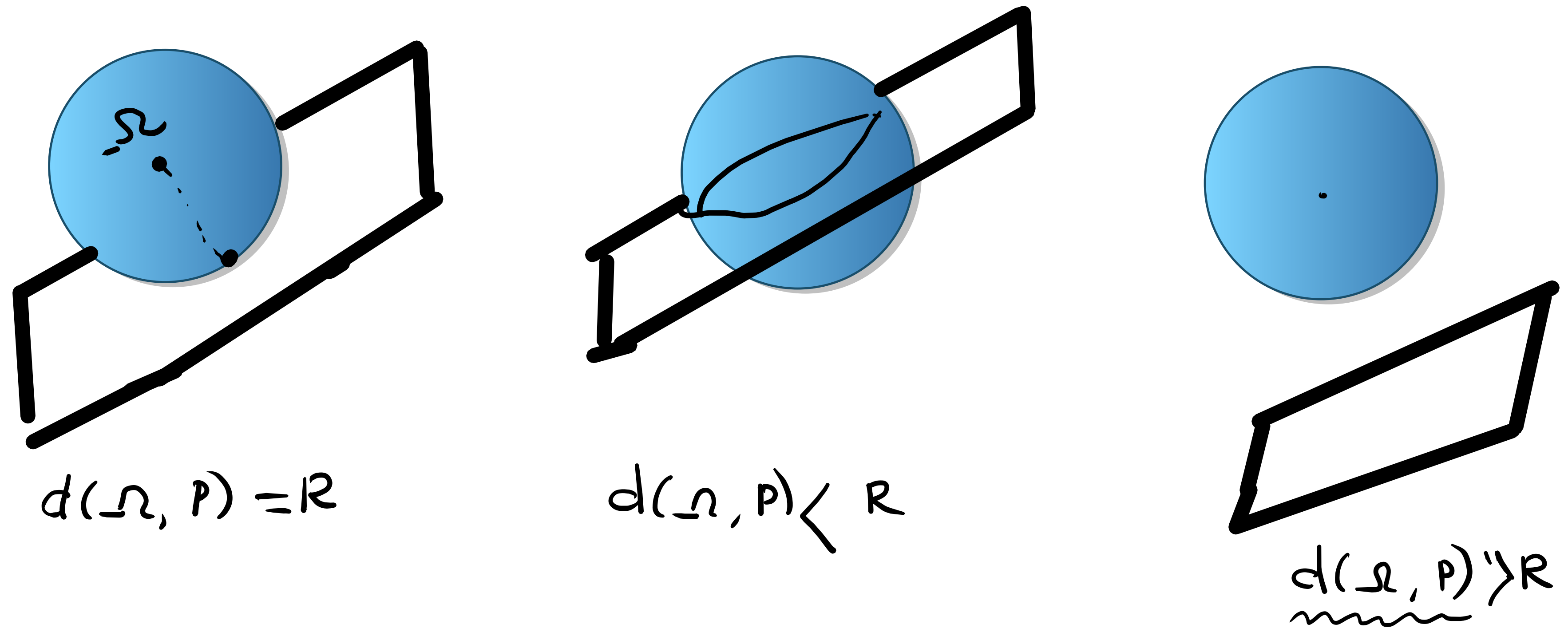
$r = \sqrt{R^2 - d^2(\Omega,(P))}$

$= \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

$(\Delta) = \begin{cases} x = x_\Omega + 2t \\ y = y_\Omega + (-2t) \\ z = z_\Omega + t \end{cases}$

$2x - 2y + z + 3 = 0$

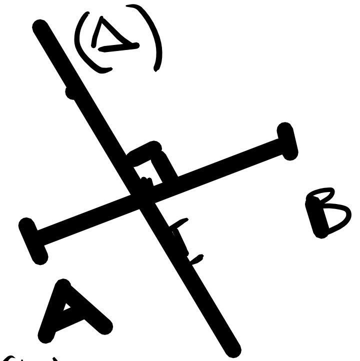



Ω
d(Ω, P) = R
d(Ω, P) < R
d(Ω, P) > R

Exercice 2 N2024

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5

1. Montrer que $2x-2y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (P)
2. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)
3. a) Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega,(P))=3$
   b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.
4. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)
   b) Montrer que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ)
   c) Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$



4) a)

on a : $(\Delta) \perp (P)$

donc un vecteur directeur de (Δ) est le vecteur $\vec{n}$ qui normale à P

et on a (Δ) passe par Ω

donc une rep par

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = t\vec{n}$

$$\underset{(\Delta)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

le centre du cercle est le projeté de Ω sur (P)

on a $(P) : 2x - 2y + z + 3 = 0$

$\Rightarrow 2(2+2t) - 2(-1-2t) + t + 3 = 0$

$4 + 4t + 2 + 4t + t + 3 = 0$

$t = -1$

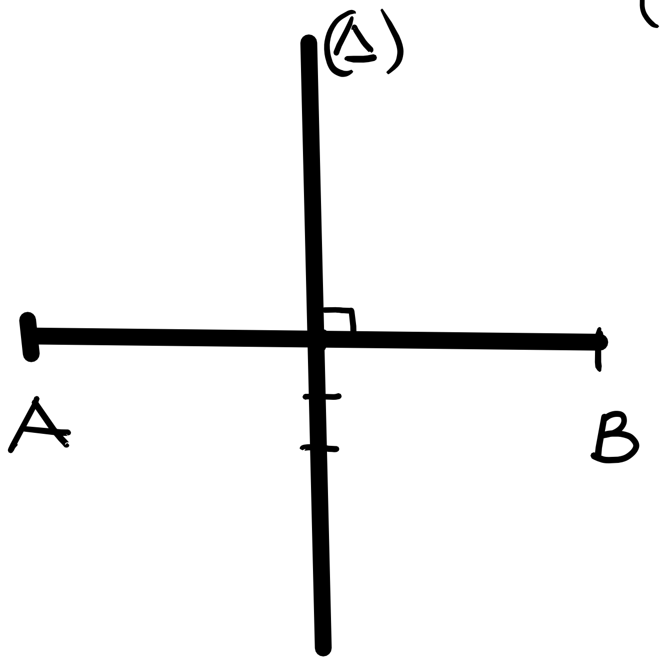
$$\begin{cases} x_H = 2 - 2 = 0 \\ y_H = -1 + 2 = 1 \\ z_H = -1 \end{cases}$$

$H($

Exercice 2 N2024

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5

1. Montrer que $2x-2y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (P)
2. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)
3. a. Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega,(P))=3$
   b. En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.
4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)
   b. Montrer que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ)
   c. Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$



$(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 0 + t \end{cases}$

$\begin{cases} 0 = 2 + 2t \\ 1 = -1 - 2t \\ -1 = t \end{cases}$

$t = -1$

$I \in (\Delta)$

(Δ) méd $[AB] \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ I \in (\Delta) \end{cases}$

$\vec{n}(2,-2,1)$, $\vec{AB}(2,2,0)$

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2\cdot 2 - 2\cdot 2 + 1\cdot 0 = 0$

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

$I(0,1,-1) \in (\Delta)$

Exercice 3 R2023

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(2,1,2)$; $B(-2,0,5)$; $C(4,-5,7)$ et $\Omega(1,-1,0)$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Vérifier que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

   c. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

2. Soient (P) le plan d'équation cartésienne $3x + 4y + z + 1 = 0$ et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P)

   a. Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$

   b. Déterminer les coordonnées du point D tel que le point H soit milieu du segment $[AD]$

3. Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

   a. Montrer que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

   b. Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

①

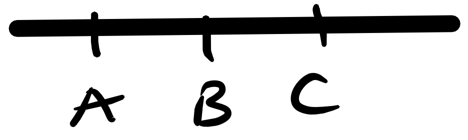
ⓐ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-6\\5\end{pmatrix}$

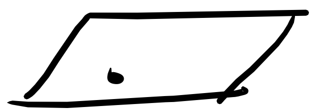
donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\-6\\5\end{pmatrix} \begin{matrix}+\vec{i}\\-\vec{j}\\+\vec{k}\end{matrix}$

$= \begin{vmatrix}-1 & -6\\ 3 & 5\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-4 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & -6\end{vmatrix}$

$= 13\vec{i} + 26\vec{j} + 26\vec{k}$

$= 13\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$





et on a $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

d'où $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = 13\vec{u}}$

On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc les points ne sont pas alignées

Exercice 3 R2023

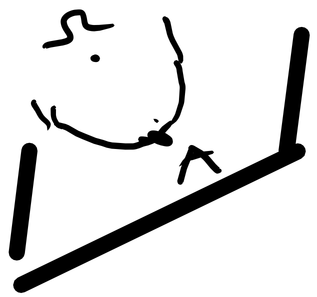
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(2,1,2)$; $B(-2,0,5)$; $C(4,-5,7)$ et $\Omega(1,-1,0)$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$
Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

1. a Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b Vérifier que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
   c Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A
2. Soient (P) le plan d'équation cartésienne $3x + 4y + z + 1 = 0$ et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P)
   a Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$
   b Déterminer les coordonnées du point D tel que le point H soit milieu du segment $[AD]$
3. Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$
   a Montrer que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D
   b Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

b/ le plan (ABC) passe par A et de vecteur normal $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$
ou bien $\vec{u}(1, 2, 2)$

donc (ABC) : $1x + 2y + 2z + d = 0$

et on a $A\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \in (ABC)$ donc
$2 + 2 + 4 + d = 0$
$d = -8$



d'où $\{(ABC) : x + 2y + 2z - 8 = 0$

c)

on calcule $d(\Omega, (ABC))$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 - 2 + 0 - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3 = R$$

donc (ABC) est tangente à la sphère en un point

Exercice 3 R2023

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(2,1,2)$; $B(-2,0,5)$; $C(4,-5,7)$ et $\Omega(1,-1,0)$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$

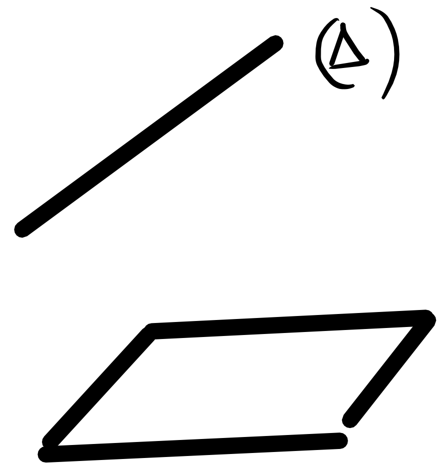
Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

1. a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Vérifier que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
   c) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A
2. Soient (P) le plan d'équation cartésienne $3x + 4y + z + 1 = 0$ et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P)
   a) Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$
   b) Déterminer les coordonnées du point D tel que le point H soit milieu du segment $[AD]$
3. Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$
   a) Montrer que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D
   b) Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

2

$(P) : 3x+4y+z+1=0$

$(\Delta) \perp (P)$ et $A \in (\Delta)$



$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_A + 3t \\ y = y_A + 4t \\ z = z_A + 1t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases} \curvearrowright 3x+4y+z+1=0$$

d'où $3(2+3t)+4(1+4t)+(2+t)+1=0$

...... $t = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x_H = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ y_H = -1 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Exercice 3 R2023

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(2,1,2)$; $B(-2,0,5)$; $C(4,-5,7)$ et $\Omega(1,-1,0)$. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{\Omega A}$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R=3$

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=13\vec{u}$ et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Vérifier que $x+2y+2z-8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

   c. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

2. Soient (P) le plan d'équation cartésienne $3x+4y+z+1=0$ et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P)

   a. Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$

   b. Déterminer les coordonnées du point D tel que le point H soit milieu du segment $[AD]$

3. Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

   a. Montrer que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

   b. Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

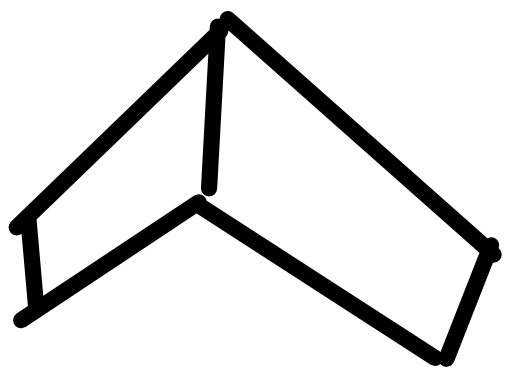
b) on a H milieu de $[AD]$

donc $H\left(\frac{x_A+x_D}{2},\frac{y_A+y_D}{2},\frac{z_A+z_D}{2}\right)$

et on a $H\left(\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{x_A+x_D}{2}=\frac{1}{2}$ et $\frac{y_A+y_D}{2}=-1$, $\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow D(-1,-3,1)$



$\Omega A = \|\vec{u}\|$

$= \sqrt{1^2+2^2+2^2}$

$= \sqrt{9} = 3 = R$

donc : $A \in (S)$ et on a $A \in (ABC)$

donc (ABC) est Tangent à (S) en A.

le Produit vectoriel

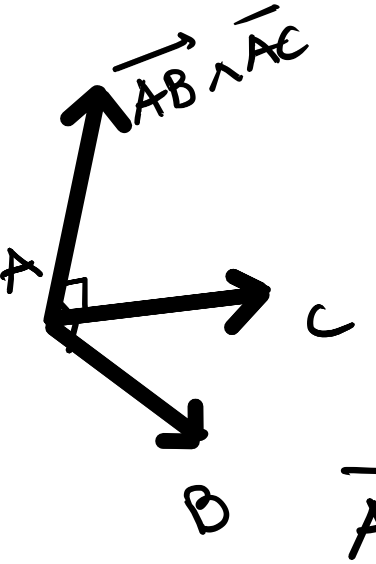
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\quad\begin{array}{cc}\vec{i} & \oplus\\ \vec{j} & \ominus\\ \vec{k} & \oplus\end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

Exemple $A(2,1,3)$, $B(1,2,4)$, $C(-1,3,2)$

(1). les point A, B et C ne sont pas alignées

(2). Déterminer une equation du plan(ABC)



$\vec{AB}\wedge\vec{AC}\neq\vec{0}$ alors les points ne sont pas alignees

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}\quad\begin{array}{cc}\vec{i} & \oplus\\ \vec{j} & \ominus\\ \vec{k} & \oplus\end{array}$$

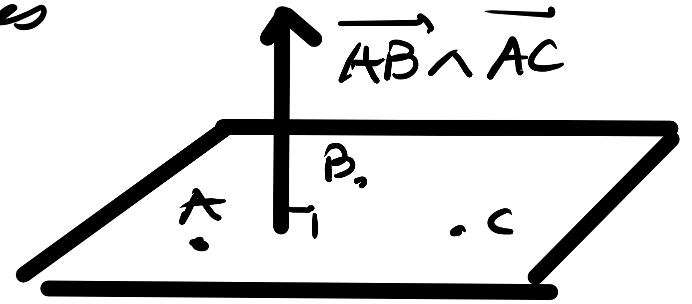
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$

d'ou $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}$.

d'ou $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\neq\vec{0}$

d'ou les points A, B et C ne sont pas alignées



Safa $\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}$ (2) le plan (ABC) passe par le point A et de vecteur normale est $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}$

donc $(ABC): -3x-4y+z+d=0$

on a: $A\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\in(ABC)$ donc

$-6-4+3+d=0$

$d=7$

$\left\{\begin{array}{l}(ABC)\\ -3x-4y+z+7=\end{array}\right.$

→ la surface du Triangle (ABC)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$$

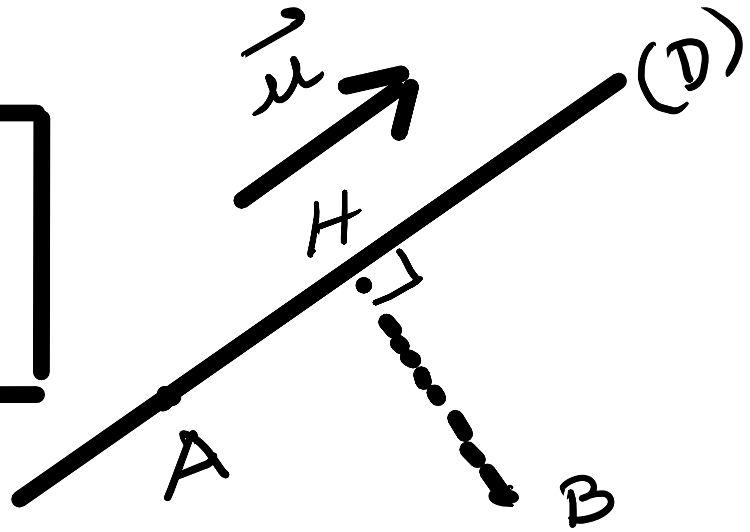
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 1^2}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{26}}{2} \ (u.A)$$

→ la distance entre un point et une droite

$$\boxed{d(B,(\Delta)) = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} \right\|}{\|\vec{u}\|}}$$



Exercice 4 N2023

2008 → 2024
N et R

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,1,4)$; $B(2,1,2)$; $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\left(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right)$
   b. En déduire l'aire du triangle ABC et la distance $d(B,(AC))$
2. Soit D le milieu du segment $[AC]$
   a. Vérifier que $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$
   b. En déduire que $d(\Omega,(ABC)) = 3$
3. Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$
   a. Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)
   b. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera
4. Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$
   Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2)

Exercice 5 R2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de center $\Omega(3,0,-1)$ et de rayon $R=3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$

1. a. Calculer la distance ΩA
   b. Montrer que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.
   c. Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S)
2. Soit le point $M_a(2a-3, 3-2a, a-1)$ où $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$
3. a. Vérifier que $2x-2y+z-9a+13=0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)
   b. Montrer que $d(\Omega,(P_a)) = |3a-6|$
   c. Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S).

Exercice 6 N2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$

   b. En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$
   Déterminer une équation de la sphère (S)

3. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

   b. Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées

   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$, puis en déduire la distance $d(A,(\Delta))$

Exercice 7 R2019

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1;2;2)$, $B(3;-1;6)$ et $C(1;1;3)$.

1. a) Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

   b) En déduire que $x - 2y - 2z + 7 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient les points $E(5;1;4)$ et $F(-1;1;12)$ et (S) l'ensemble des points M vérifiant : $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0$.
   Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(2;1;8)$ et de rayon $R = 5$.

3. a) Calculer $d(\Omega;(ABC))$ distance du point Ω au plan (ABC).

   b) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = 4$.

n

Exercice 2 (3 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation : $(E): \quad z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{8} + 1 = 0$

1)- a)- Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = -\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$ **0,25pt**

b)- En déduire les soutions de l'équation (E) **0,5pt**

2)- On pose : $a = \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$

a)- Écrire a sous forme trigonométrique **0,25pt**

b)- Montrer que le nombre a^4 est imaginaire pur. **0,5pt**

3)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a^2 et $b = 1 - i$

a)- Vérifier que $\sqrt{2}\,a^2 = b$, puis en déduire que les points O, A et B sont alignés. **2x0,5pt**

b)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\frac{z}{a} - a\sqrt{2}\right| = 3$ **0,5pt**

Problème (9 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{\frac{-2}{x}}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$)

1)- Calculer les limites $\lim_{x\to0^-} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **3x0,5pt**

2)- Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro. **0,75pt**

3)- Montrer que $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **2x0,5pt**

4)- a)- Montrer que $f'(x) = \left(\frac{(x+1)^2+1}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ **0,5pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

5)- a)- Vérifier que : $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}} - 1\right) = -2$ et $\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}} - 1\right) = -2$ **2x0,5pt**

b)- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ **2x0,5pt**

6)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses exactement en deux points à déterminer. **0,5pt**

7)- Construire la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ *(On admet que $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$)* **0,75pt**

8)- Déterminer graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(x+m)e^{\frac{2}{x}} - x = 1$ **0,75pt**

9)- a)- Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 e^{\frac{-2}{x}}$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$ **0,25pt**

b)- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ **0,5pt**

1) $\lim_{0^-} f(x) = \lim_{0^-} (x+1)e^{-2/x} = +\infty$

car $\begin{cases} \lim_{0^-} -\frac{2}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{0^-} e^{-2/x} = +\infty \\ \lim_{0^-} (x+1) = 1 \end{cases}$

. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} (x+1)e^{-2/x} = +\infty$

car $\begin{cases} \lim_{+\infty} -2/x = 0 \\ \text{et } \lim_{+\infty} e^{-2/x} = e^0 = 1 \\ \lim_{+\infty} (x+1) = +\infty \end{cases}$

$\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$ car { - - - -

2) $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (x+1)e^{-2/x} = 0$

car $\begin{cases} \lim_{0^+} -\frac{2}{x} = -\infty \\ \text{et } \lim_{0^+} e^{-2/x} = 0 \\ \lim_{0^+} x+1 = 1 \end{cases}$

donc : $\lim_{0^+} f(x) = 0 = f(0)$

d'où f est continue à droite de 0

Problème (9 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{\frac{-2}{x}}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$)

1)- Calculer les limites $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **3x0,5pt**

2)- Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro. **0,75pt**

3)- Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **2x0,5pt**

4)- a)- Montrer que $f'(x) = \left(\frac{(x+1)^2+1}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ **0,5pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

5)- a)- Vérifier que : $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}} - 1\right) = -2$ et $\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}} - 1\right) = -2$ **2x0,5pt**

b)- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ **2x0,5pt**

6)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses exactement en deux points à déterminer. **0,5pt**

7)- Construire la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ *(On admet que $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$)* **0,75pt**

8)- Déterminer graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(x+m)e^{\frac{2}{x}} - x = 1$ **0,75pt**

9)- a)- Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 e^{\frac{-2}{x}}$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$ **0,25pt**

b)- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ **0,5pt**

3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)e^{-2/x}}{x}$ $\qquad \lim_{-\infty} Xe^X = 0$

On pose $X = -\frac{2}{x} \longrightarrow x = -2/X$

$x \to 0^+ \Rightarrow X \longrightarrow -\infty$

$= \lim_{0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-2/x}$

$= \lim_{X\to-\infty} \left(1 - \frac{X}{2}\right)e^X$

$= \lim_{X\to-\infty} e^X - \frac{1}{2}Xe^X = 0$

car $\begin{cases} \lim_{-\infty} Xe^X = 0 \\ \lim_{-\infty} e^X = 0 \end{cases}$

Hajar Ounida

f est dérivable à droite de 0 donc (C_f) admet une demi-tangente horizontale à droite du pt $O(0,0)$

Problème (9 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=(x+1)e^{\frac{-2}{x}},\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **3x0,5pt**

2)- Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro. **0,75pt**

3)- Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}=0$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **2x0,5pt**

4)- a)- Montrer que $f'(x)=\left(\dfrac{(x+1)^2+1}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ **0,5pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

5)- a)- Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}}-1\right)=-2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}}-1\right)=-2$ **2x0,5pt**

b)- Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ **2x0,5pt**

6)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses exactement en deux points à déterminer. **0,5pt**

7)- Construire la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ (*On admet que* $(\mathscr{C}_f)$ *est au-dessus de* (D) *sur* $\mathbb{R}$) **0,75pt**

8)- Déterminer graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(x+m)e^{\frac{2}{x}}-x=1$ **0,75pt**

9)- a)- Vérifier que la fonction $F: x\mapsto \dfrac{1}{2}x^2e^{\frac{-2}{x}}$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$ **0,25pt**

b)- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ **0,5pt**

$(e^u)' = u'.e^u$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

4) a) on a : $x \to x+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \to -2/x$ .. .. $\mathbb{R}^*$

donc $x \to e^{-2/x}$ .. .. $\mathbb{R}^*$

d'ou f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ f'(x) = (x+1)'e^{-2/x} + (e^{-2/x})'(x+1)$

$= e^{-2/x} + (-2/x)'e^{-2/x}(x+1)$

$= e^{-2/x} + \frac{2}{x^2}(x+1)e^{-2/x} = e^{-2/x}\left(1+\frac{2(x+1)}{x^2}\right)$

$= e^{-2/x}\left(\frac{(x+1)^2+1}{x^2}\right) = e^{-2/x}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2}\right)$

$= e^{-2/x}\left(\frac{(x+1)^2+1}{x^2}\right)$

on a $\forall x\in\mathbb{R}^*$ $f'(x)>0$ car $\{$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ 0	$\nearrow$	$+\infty$

Problème (9 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=(x+1)e^{\frac{-2}{x}}, & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **3x0,5pt**

2)- Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro. **0,75pt**

3)- Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}=0$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **2x0,5pt**

4)- a)- Montrer que $f'(x)=\left(\dfrac{(x+1)^2+1}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ **0,5pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

5)- a)- Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}}-1\right)=-2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}}-1\right)=-2$ **2x0,5pt**

b)- Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ **2x0,5pt**

6)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses exactement en deux points à déterminer. **0,5pt**

7)- Construire la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ (*On admet que $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$*) **0,75pt**

8)- Déterminer graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(x+m)e^{\frac{2}{x}}-x=1$ **0,75pt**

9)- a)- Vérifier que la fonction $F: x\mapsto \frac{1}{2}x^2e^{\frac{-2}{x}}$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$ **0,25pt**

b)- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ **0,5pt**

5/ a

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{-2/x}-1\right)$

$\frac{1}{x}\ln(x)$ $(\ln x)'\ln(x)$ $\frac{\ln^2(x)}{2}$ $\int_{1/e}^{e}\frac{1}{x}|\ln(x)|$

x	$1/e$	1	e
$\ln(x)$	$-$	0	$+$

$= \int_{1/e}^{1} -\frac{\ln x}{x}dx + \int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$

On pose $X=-2/x$ alors $x=-2/X$

si $x\to+\infty \Rightarrow X\to 0$

$\to \lim\limits_{X\to 0} -\frac{2}{X}\left(e^X-1\right) = \lim\limits_{0} -2\left(\frac{e^X-1}{X}\right) = -2$

car $\lim\limits_{0}\frac{e^X-1}{X}=1$

b-

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim\limits_{+\infty}(x+1)e^{\frac{-2}{x}}-(x-1)$

$= \lim\limits_{+\infty} xe^{-2/x}+e^{-2/x}-x+1$

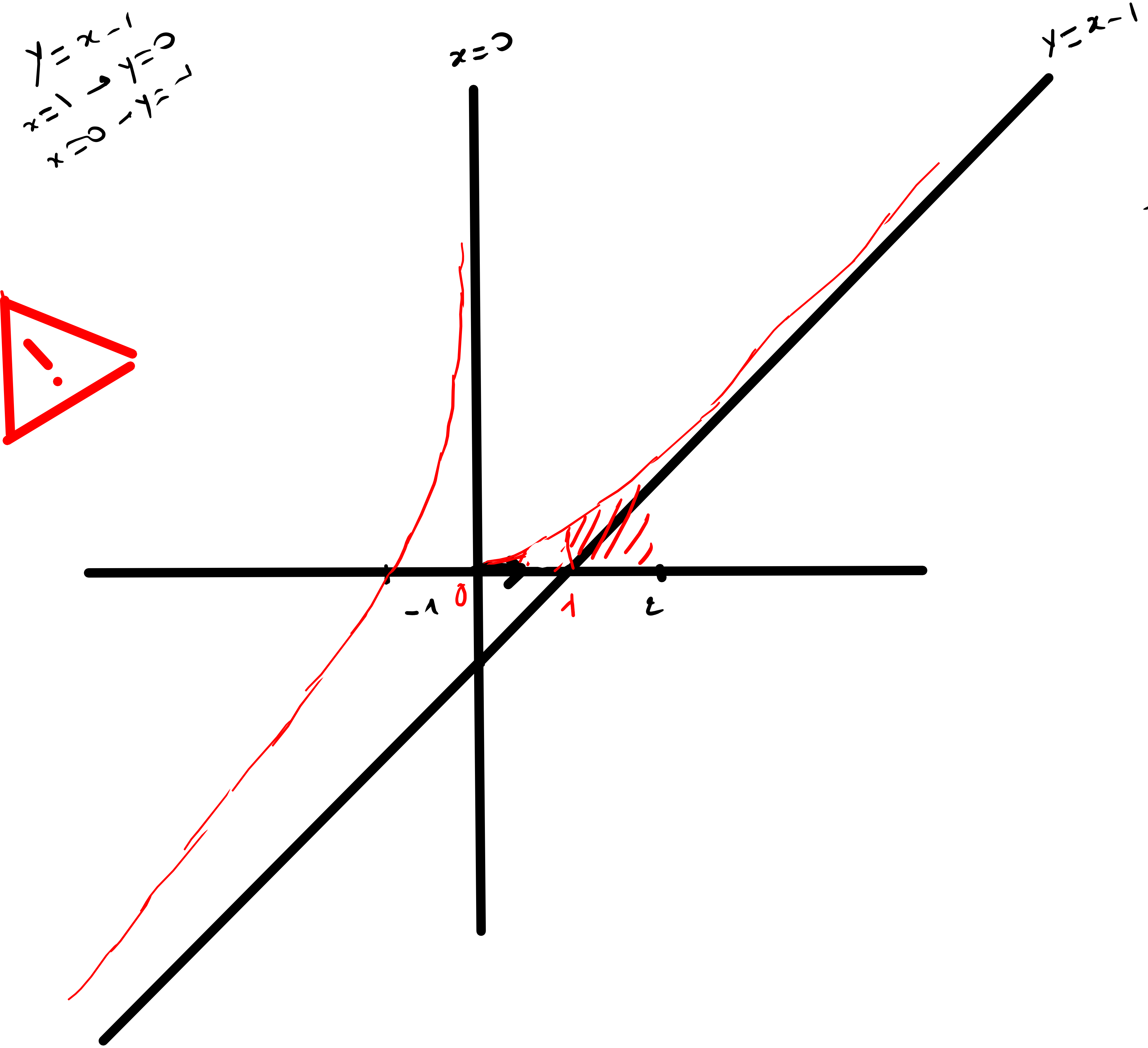
$= \lim\limits_{+\infty} x\left(e^{-2/x}-1\right)+e^{-2/x}+1$

$= -2+1+1=0$

$y = x - 1$

$x = 1 \to y = 0$

$x = 0 \to y = -1$



$$\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x)|\,dx .$$

$$= \int_1^2 f(x)\,dx$$ (car (C_f) est dessus de l'axe (ox) sur [ ]

$$= \Big[F(x) \Big]_1^2$$

$$= \left[\frac{2}{x^2} e^{-2/x} \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{4} e^{-1} - 2e^{-2} = \ldots$$

Problème : (8,5 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ (unité : 1 cm)

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0,5 pt **2 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

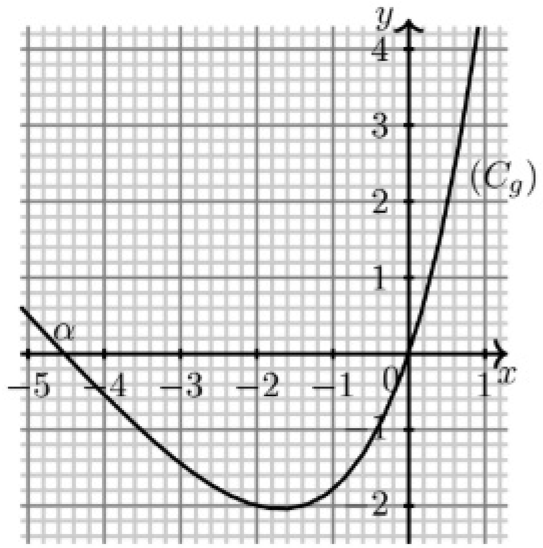
0,5 pt **3 - a)** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0,75 pt **b)** Étudier le signe de $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

0,5 pt **4 - a)** Montrer que $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 pt **b)** Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$



0,5 pt **5 - a)** Montrer que $f''(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$

où $g(x) = (2x+4)\,e^{\frac{x}{2}} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 pt **b)** A partir de la courbe ci-contre de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha) = 0$)

0,5 pt **c)** Étudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

1 pt **6 -** Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$

(On prend : $\ln(4) \simeq 1,4$; $\alpha \simeq -4,5$ et $f(\alpha) \simeq -3,5$)