Exercice 1 R2024

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(1,1,0)$ et $\Omega(-1,1,-2)$ et le plan (P) d'équation $x+z-1=0$

1.
   - a) Vérifier que A est un point du plan (P) et donner un vecteur normal de (P).
   - b) Montrer que la droite (ΩA) est perpendiculaire au plan (P).

2. Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant :
   $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$
   - a) Montrer que (S) est une sphère de centre Ω et déterminer son rayon.
   - b) Montrer que (P) coupe (S) suivant un cercle de centre A puis déterminer son rayon.

3. Soit (Q_m) un plan d'équation $x+y+mz-2=0$, où m est un nombre réel.
   - a) Vérifier que A est un point du plan (Q_m), pour tout m de $\mathbb{R}$
   - b) Déterminer la valeur du réel m pour que (Q_m) soit perpendiculaire au plan (P)
   - c) Existe-t-il un plan (Q_m) qui coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre A? Justifier.

Exercice 2 N2024

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5

1. Montrer que $2x-2y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (P)
2. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)
3. a. Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega,(P))=3$

   b. En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.
4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

   b. Montrer que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ)

   c. Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 3 R2023

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(2,1,2)$; $B(-2,0,5)$; $C(4,-5,7)$ et $\Omega(1,-1,0)$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$
Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Vérifier que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

   c. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

2. Soient (P) le plan d'équation cartésienne $3x + 4y + z + 1 = 0$ et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P)

   a. Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$

   b. Déterminer les coordonnées du point D tel que le point H soit milieu du segment $[AD]$

3. Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

   a. Montrer que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

   b. Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

Exercice 4 N2023

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,1,4)$; $B(2,1,2)$; $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\left(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right)$

   b. En déduire l'aire du triangle ABC et la distance $d(B,(AC))$

2. Soit D le milieu du segment $[AC]$

   a. Vérifier que $\overrightarrow{D\Omega} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$

   b. En déduire que $d(\Omega,(ABC)) = 3$

3. Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$

   a. Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)

   b. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera

4. Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$
   Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2)

Exercice 5 R2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de center $\Omega(3,0,-1)$ et de rayon $R=3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$

1. a) Calculer la distance ΩA
   b) Montrer que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.
   c) Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S)

2. Soit le point $M_a(2a-3, 3-2a, a-1)$ où $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

3. a) Vérifier que $2x-2y+z-9a+13=0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)
   b) Montrer que $d(\Omega,(P_a)) = |3a-6|$
   c) Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S).

Exercice 6 N2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$

   b. En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$
   Déterminer une équation de la sphère (S)

3. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

   b. Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées

   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$, puis en déduire la distance $d(A,(\Delta))$

Exercice 7 R2019

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1;2;2)$, $B(3;-1;6)$ et $C(1;1;3)$.

1. a. Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

   b. En déduire que $x - 2y - 2z + 7 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient les points $E(5;1;4)$ et $F(-1;1;12)$ et (S) l'ensemble des points M vérifiant : $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0$.

   Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(2;1;8)$ et de rayon $R = 5$.

3. a. Calculer $d(\Omega;(ABC))$ distance du point Ω au plan (ABC).

   b. En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = 4$.