

### Exercice 3 (3 points) :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A$  ;  $B$  ;  $C$  et  $D$  d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{2}, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = 1 - i \text{ et } z_D = 2 + \sqrt{2}$$

0,25 **1) a)** Montrer que :  $z_B - z_A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z_C - z_A)$

0,25 **b)** Écrire  $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$  sous forme trigonométrique.

0,5 **c)** Montrer que:  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$  et déterminer la nature du triangle  $ABC$

0,25 **d)** Déterminer l'image de  $C$  par la rotation  $R$  de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

0,5 **2)a)** Montrer que  $ACDB$  est un losange.

0,25 **b)** Montrer que :  $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(1 + \sqrt{2} + i)[2\pi]$

0,5 **c)** En déduire que :  $\arg(1 + \sqrt{2} + i) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$

0,5 **d)** Montrer que  $(1 + \sqrt{2} + i)^{2024}$  est un nombre réel

### EXERCICE N° 3

On considère dans le plan complexe muni repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = \sqrt{3} - i$ ;  $b = (2 - \sqrt{3}) - i$  et  $c = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

**1** Montrer que  $a$  et  $2 - b$  sont les solutions de l'équation d'inconnue dans  $\mathbb{C}$  :  $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

**2 a** Montrer que :  $a + b = -\sqrt{2}c$

**b** Montrer que :  $\frac{a}{c} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}b$

**c** Écrire  $a$  et  $b$  sous forme exponentielle et en déduire que :  $a = ce^{i\frac{\pi}{3}}$

**d** En déduire un argument du nombre complexe  $b$ .

**3** Déterminer une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ .

**4** Soit  $d$  l'affixe du point  $D$  l'image de  $A$  par la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\frac{5\pi}{12}$

**a** Montrer que :  $d = ae^{i\frac{3\pi}{2}}$

**b** En déduire que  $d^{2025} \in \mathbb{R}$

**5** Soit  $e$  l'affixe du point  $E$  l'image de  $A$  par la rotation  $R'$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

Montrer que  $e = ia$  puis déterminer la nature du triangle  $ODE$

**6** Déterminer l'affixe du point  $P$  l'image de  $O$  par la translation  $T$  de vecteur  $\overrightarrow{DE}$  puis donner la nature du quadrilatère  $DEPO$

**7** Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  différent de  $O$

**a** Montrer que  $z - \frac{1}{z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$  ou  $z\bar{z} = 1$

**b** Déduire l'ensemble de points  $M(z)$  tel que  $z - \frac{1}{z} \in i\mathbb{R}$

## Dénombrement

1.

Un sac contient dix boules indiscernables au touche dont :

- Trois boules rouges .
- Trois boules vertes .
- Quatre boules noires .
- On tire au hasard et simultanément 2 boules du sac .



1. Déterminer le nombre des tirages possibles ( ou les cas possibles ) .
2. Déterminer le nombre des cas tel que les deux boules de même couleur .
3. Déterminer le nombre des cas tel que les deux boules de couleurs différentes.
4. Répondre aux même questions tel que :
  - a. On tire au hasard et successivement et sans remise deux boules du sac .
  - b. On tire au hasard et successivement et avec remise deux boules du sac .

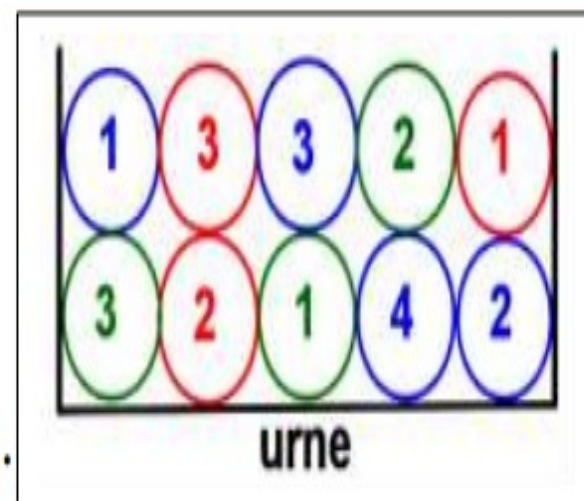
2.

**2.**

On dispose une urne    contient dix jetons indiscernables au toucher:

- Quatre jetons bleus numérotés 1 ; 2 ; 3 ; 4
- Trois jetons rouges numérotés 1 ; 2 ; 3 .
- Trois jetons verts numérotés 1 ; 2 ; 3 .

On tire au hasard et simultanément deux jetons de l'urne.



1. Déterminer le nombre des tirages possibles ( ou les cas possibles ) .
2. Déterminer le nombre des cas tel que les deux jetons de même couleur .
3. Déterminer le nombre des cas tel que les deux jetons de couleurs différentes.
4. Déterminer le nombre des cas tel que la somme des numéros des deux jetons est 5 .
5. Répondre aux même questions tel que :
  - a. On tire au hasard et successivement et sans remise deux jetons de l'urne.
  - b. On tire au hasard et successivement et avec remise deux jetons de l'urne.

**3.**

Soit  $f$  la fonction définie par

	$-\infty$	$-2$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+		-
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3) En deduire le signe de  $f''(x)$   
en deduire les variations de  $f$

$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = 0$ ,  $\exists \alpha \in ]0, 1[$  tq  $f(\alpha) = 0$   
et  $f$  s'annule et change  
de signe en  $\alpha$ .

- 1) Déterminer le signe de  $f(x)$   
à partir du Tableau
- 2) tracer  $(f)$

















