Exercice 2 : (11 points)

Partie 1 : On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2+2-2\ln(x)$$

1 pt **1 -** Montrer que $g'(x)=2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$.

1 pt **2 -** En déduire g est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

0.25 pt **3 -** **a)** Calculer $g(1)$.

0.25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de g. *(Le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé)*

0.5 pt **c)** En déduire que $g(x)\geq 3$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Partie 2 : On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+1+\frac{2\ln(x)}{x}$$

Et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

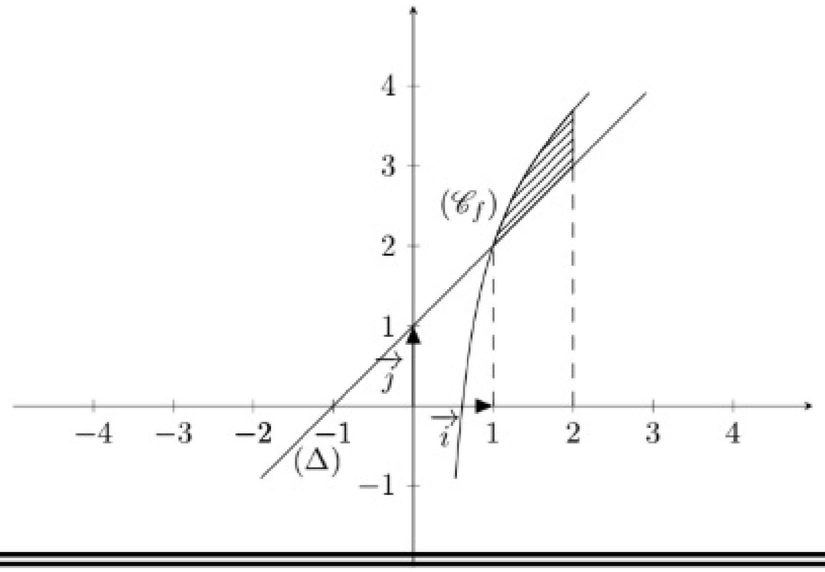
1 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

0.5 pt **2 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))$.

0.25 pt **c)** Donner une interprétation géométrique du résultat.

1 pt	**3 -** **a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.
0,5 pt	**b)** Déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
0.5 pt	**c)** Dresser le tableau de variations de f.
1 pt	**4 -** **a)** Montrer que $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}\left(-3+2\ln(x)\right)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.
1 pt	**b)** En déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse $e\sqrt{e}$.
	5 - Dans la figure ci-dessous $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x+1$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1 pt	**a)** Montrer que : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln(2)\right)^2$
0.75 pt	**b)** En déduire l'aire de la partie hachurée.



Exercice 3 : (4.5 points) **(On donnera les résultats sous forme de fraction)**

Une urne contient six jetons rouges portant les numéros $1, 2, 2, 2, 3, 3$ et quatre jetons verts portant les numéros $2, 2, 2, 3$ (Toutes les jetons sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément au hasard trois jetons de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « Les jetons tirés portent le même numéro »

B : « Les jetons tirés sont de même couleur »

0.5 pt **1 -** Montrer que le nombre de tirages possible est égal à 120.

0.75 pt **2 -** **a)** Montrer que $p(A) = \dfrac{7}{40}$.

0.75 pt **b)** Calculer $p(B)$.

1 pt **c)** Calculer la probabilité de tirer trois jetons de même couleur sachant qu'ils portent le même numéro.

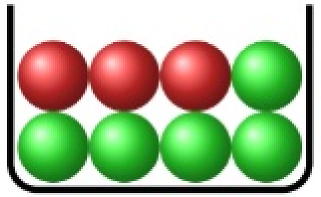
0.5 pt **d)** Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3 - Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de couleurs obtenues à chaque tirage.

1 pt Calculer $p\left(X=1\right)$ et $p\left(X=2\right)$.

Exercice 2 : (4 pts)

Donner les résultats sous forme de fraction



Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher dont **cinq** boules sont vertes et **trois** sont rouges.

On tire au hasard **successivement** et **sans remise** deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : " Les deux boules tirées sont rouges ".

B : " La première boule tirée est rouge ".

C : " La deuxième boule tirée est verte ".

1 pt **1 -** Montrer que $p(A) = \dfrac{6}{56}$ et $p(B) = \dfrac{21}{56}$.

1 pt **2 -** Calculer $p(C)$. .

1 pt **3 -** Calculer $p(B \cap C)$.

1 pt **4 -** Les événements B et C sont-ils indépendants ?justifier la réponse.

Problème : (12 pts)

PARTIE I -

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x$

0.5 pt **1 -** Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **2 -** **a)** étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Calculer $g(0)$ puis dresser le tableau de variations de g.(le calcul des limites n'est pas demandé).

0.5 pt **c)** En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}; g(x) \leq 1$.

PARTIE II -

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = (x+1)e^{-x} + (x-1)$

et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 pt **1 -** **a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

0.5 pt **b)** Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

1 pt **2 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x-1))$.

0.5 pt **b)** Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

1 pt **3 -** **a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^x}$.

0.5 pt **b)** En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **c)** Dresser son tableau de variation.

1 pt **d)** Donner l'équation de la tangente (T)au point d'abscisse 0.

1 pt **e)** Résoudre l'équation $f(x) = x - 1$, puis en déduire les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite (Δ) d'équation : $y = x - 1$.

0,5 pt **4 -** **a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-1)$.

1 pt **b)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion dont on déterminera ses coordonnées.

5 - Dans la figure ci-dessous $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 pt **a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \frac{3}{\mathrm{e}}$.

0,5 pt **b)** Calculer l'aire de la partie hachurée de la figure.

Exercice 2 : (4 pts) **(Donner les résultats sous forme de fraction)**

Un sac S_1 contient deux boules blanches, une boule rouge et trois boules vertes.

Un autre sac S_2 contient une boule blanche, deux boules rouges et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience suivante : " on tire une boule du sac S_1 puis on tire une boule du sac S_2 "

On considère les événements suivants :

A : " Les deux boules tirées sont blanches "

B : " Les deux boules tirées sont de couleurs différentes "

1,5 pt	**1 -** Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{12}$
1,5 pt	**2 -** Montrer que $p(\bar{B}) = \dfrac{7}{24}$ ($\bar{B}$ est l'événement contraire de B) et en déduire $p(B)$
1 pt	**3 -** Calculer $p(A \cup B)$