Exercice 3

Pour tout entier naturel n, non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Étudier les fonctions f_1 et f_2 et construire leur représentation graphique respective $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ dans un repère orthonormé du plan $(O:\vec{i},\vec{j})$. Préciser la position relative de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

2) Prouver que, pour tout n, f_n est intégrable sur $[0;1]$.

On définit, alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

3) **a)** À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de f_n sur $]0;1]$.

b) En déduire une primitive de f_n sur $[0;1]$.

c) Montrer que $u_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

d) Soit D le sous-ensemble du plan constitué des points M dont les coordonnées $(x;y)$ dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ vérifient $0 \le x \le 1$ et $f_1(x) \le y \le f_2(x)$. Calculer, l'aire de D.

4) Soit g la fonction, définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

a) Montrer que g est intégrable sur $[0;1]$.

b) Soit x un réel quelconque. Calculer pour tout n de N la somme :
$S_n(x) = x - x^3 + x^5 - x7 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1}$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{1+x^2}$.

d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 g(x)dx = u_1 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{f_{2n+3}(x)}{1+x^2}dx$.

e) On pose pour tout n de N, $S_n = u_1 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_{2n+1}$.

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\int_0^1 g(x)dx - S_n\right| \le -u_{2n+3}$.

f) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 g(x)dx$.

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\int_0^1 g(x)dx - S_n\right| \leq -u_{2n+3}$.

f) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 g(x)dx$.

g) Déterminer un entier n_0 tel que $\left|\int_0^1 g(x)dx - S_{n_0}\right| \leq 10^{-2}$. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de $\int_0^1 g(x)dx$.

5) Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $G(x) = \int_0^x g(t)dt$.

a) Étudier la dérivabilité de G et son sens de variation.

b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, t \geq 1 \quad , \quad \frac{1}{2t^2} \leq \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{t^2}$.

c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \quad , \quad \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt \leq \int_1^x g(t)dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$.

d) Calculer pour tout $x > 1 \quad , \quad \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$.

e) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{G(x)}{x}$.

6) Donner l'allure de la courbe représentative de G. Préciser la tangente au point d'abscisse 1 et la nature de la branche infinie. La courbe a-t-elle une tangente au point d'abscisse 0 ?

- ***Exercice 01:(03pts)***

➡ *Soient* p *et* q *deux entiers naturels* ***premiers*** *tels que :*

$$p \leq q \ \text{ et } 10^{p+q-1} \equiv 1[pq].$$

0,25 **1)- a)-** *Montrer que :* $p \wedge 10 = 1$.

0,75 **b)-** *En déduire que :* $10^{p-1} \equiv 1[p]$ *et* $10^{q} \equiv 1[p]$.

0,25 **2)- a)-** *Montrer que :* $(p-1) \wedge q = 1$.

0,75 **b)-** *Prouver que :* $p = 3$ *, puis en déduire que* $10^{q+2} \equiv 1[q]$.

0,25 **3)- a)-** *Décomposer* $10^3 - 1$ *en facteurs premiers .*

0,75 **b)-** *Prouver que :* $q \in \{3;37\}$.

<u>**Durée : 04 heures**</u>

○ <u>Exercice 01:(03pts)</u>

1)- Soit $p \geq 2$ un entier naturel <u>premier</u>.

On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tels que : $9a^2 + 15a + 7 \equiv 0[p]$.

0,5 **a)-** Montrer que : $p \geq 5$.

0,5 **b)-** Prouver que : $(3a+2)^3 \equiv 1[p]$.

0,25 **c)-** En déduire que : $(3a+2) \wedge p = 1$.

0,5 **d)-** En utilisant le théorème de Fermat, prouver que : $p \equiv 1[3]$.

0,25 **2)- a)-** Montrer que l'entier **149** est premier.

0,25 **b)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $(E): 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0[149]$.

0,75 **3)-** Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $(E): 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0[19]$.

○ <u>Exercice 02:(3,5pts)</u>

Exercice 01:(03pts)

➡ *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = 2\times 7^n + 3\times 5^n - 5$.*

0,25 **1)- a)-** *Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), a_{n+1} \equiv a_n [24]$.*

0,25 **b)-** *Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), a_n \equiv 0[24]$.*

2) - *Soit $p > 7$ un entier naturel <u>premier</u> .*

0,5 **a)-** *Prouver que : $a_{p-1} \equiv 0[p]$.*

0,5 **b)-** *En déduire que l'entier a_{p-1} est divisible par $24p$.*

3)- *On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): a_3x - a_2y = 5a_1$.*

0,5 **a)-** *Vérifier que (E) est équivalente à l'équation : $(F): 44x - 7y = 5$.*

0,5 **b)-** *Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) (en précisant les différentes étapes).*

4)- *Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on pose : $x_q = 7q + 6$ et $y_q = 44q + 37$.*

0,5 ✔ *Montrer que le couple (x_q, y_q) est de l'équation (E) , puis en déduire toutes Les valeurs de l'entier naturel q pour lesquels $x_q \wedge y_q = 1$.*

Exercice 02:(3,5pts)