

✚ Exercice 1 : Étude du mouvement du centre d'inertie d'un système formé d'un motard et d'une moto

Le saut en longueur à moto est une épreuve sportive de performance où il y a un véritable défi de sauter le plus loin à partir d'un espace défini.

Cet exercice se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie G d'un système (S) formé d'un motard et d'une moto se déplaçant sur une piste de compétition.

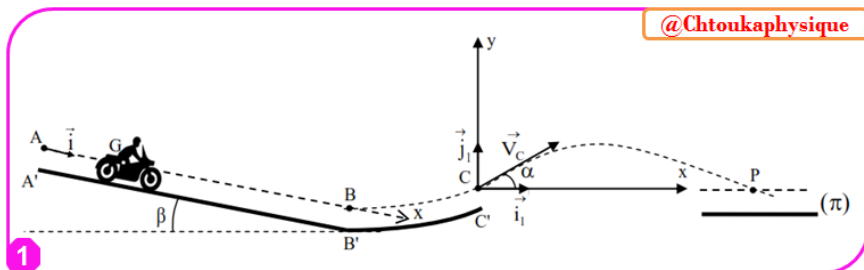
Cette piste est formée :

- D'une partie rectiligne $A'B'$ inclinée d'un angle β par rapport à l'horizontale
- D'un tremplin $B'C$ circulaire
- D'une zone d'atterrissage (π) plane et horizontale (figure 1)

Dans tout l'exercice, les frottements sont négligés et l'étude du mouvement du centre d'inertie G est réalisée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

• Données :

- L'angle $\beta = 10^\circ$,
- Intensité de la pesanteur $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
- Masse du système (S) : $m = 190 \text{ Kg}$,

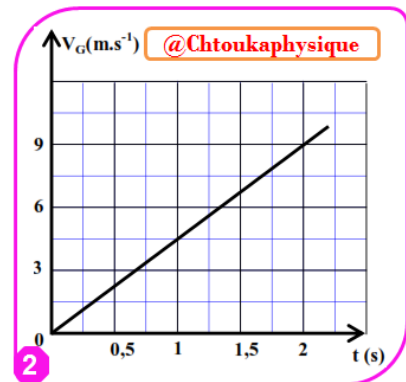


➤ Partie I : Étude du mouvement de G sur la partie $A'B'$

A un instant choisi comme origine des dates ($t = 0$), le système (S) s'élance sans vitesse initiale, d'une position où le centre d'inertie G est confondu avec le point A .

Le système est soumis, au cours de son mouvement sur la partie $A'B'$, à la réaction du plan incliné, à son poids et à une force motrice \vec{F} constante, dont la ligne d'action est parallèle à la trajectoire de G et le sens est celui du mouvement. Pour étudier le mouvement de G au cours de cette phase, on choisit un repère d'espace (A, \vec{i}) parallèle à $A'B'$ (figure 1) et on repère la position de G par son abscisse x .

1. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'expression de l'accélération a_G du mouvement de G est : $a_G = \frac{F}{m} + g \cdot \sin \alpha$
2. La courbe de la figure 2 représente les variations de la vitesse instantanée v_G du centre d'inertie G en fonction du temps. En exploitant cette courbe, trouver la valeur de l'accélération a_G .
3. Déduire l'intensité F de la force motrice
4. Écrire l'expression numérique de l'équation horaire $x = f(t)$ du mouvement de G
5. Sachant que $AB = 36 \text{ m}$, déterminer l'instant t_B de passage de G par le point B
6. Calculer la vitesse v_B de passage de G par le point B



➤ Partie II : Étude du mouvement de G lors de la phase de saut

A un instant choisi comme nouvelle origine des dates ($t = 0$), le système (S) quitte le tremplin lors du passage de G par le point C avec une vitesse \vec{V}_C formant un angle $\alpha = 18^\circ$ avec l'horizontale.

Le système (S) retombe en une position où le point G se confond avec le point P . On suppose que le système n'est soumis qu'à son poids au cours de cette phase. L'étude du mouvement est effectuée dans le repère orthonormé $(C, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ indiqué sur la figure 1.

1. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que les équations différentielles vérifiées par les coordonnées $x_G(t)$ et $y_G(t)$ du centre d'inertie G dans le repère $(C, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ s'écrivent ainsi :

$$\frac{dx_G}{dt} = V_C \cdot \cos \alpha \quad \text{et} \quad \frac{dy_G}{dt} = -g \cdot t + V_C \cdot \sin \alpha$$
2. Les expressions numériques des équations horaires $x_G(t)$ et $y_G(t)$ du mouvement de G s'écrivent ainsi :
 $x_G(t) = 19,02 t$ et $y_G(t) = -5 t^2 + 6,18 t$ (x_G et y_G exprimées en mètre et t en seconde)
 vérifier que la vitesse de G au point C est : $V_C = 20 \text{ m.s}^{-1}$
3. On considère qu'un saut est réussi si la condition $CP \geq 30 \text{ m}$ est vérifiée
 - 3.1 Montrer que le saut effectué dans ce cas n'est pas réussi
 - 3.2 Déterminer la vitesse minimale V_{\min} avec laquelle doit passer G par le point C pour que le saut soit réussi

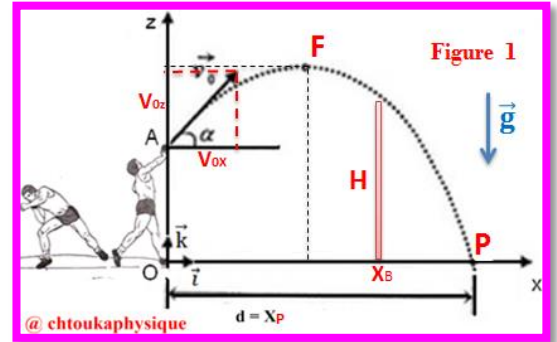
Exercice 2 : Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme

Un projectile (une boule) de masse m est lancé , à l'instant $t = 0$, à partir d'un point A , avec une vitesse initial \vec{v}_0 faisant un angle α avec un axe horizontale .

On étudie le mouvement du centre d'inertie G du projectile dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ attaché au référentiel terrestre considérée galiléen. le vecteur vitesse initial \vec{v}_0 du projectile se trouve dans le vertical (xoz) . et on pose $OA = h_A$

On néglige toute influence de l'air .

Le champ de pesanteur est uniforme et le vecteur pesanteur terrestre s'écrit : $\vec{g} = -g \vec{k}$



Partie I : Équations horaires du mouvement

1. Représenter le vecteur vitesse \vec{v}_G du centre d'inertie G du projectile sur la figure 1 . Conclure
2. Préciser les conditions initiales : c'est -à-dire les coordonnées du vecteur position \vec{OG}_0 et les coordonnées du vecteur \vec{v}_0
3. En appliquant la deuxième loi de Newton , trouver les composantes de l'accélération \vec{a}_G dans le repère (O, x, y, z) .
4. Dédire les équations différentielles vérifiées par les composantes du vecteur vitesse \vec{v}_G : $v_x(t)$, et $v_z(t)$
5. Trouver les coordonnées du vecteur vitesse \vec{v}_G : $v_x(t)$ et $v_z(t)$ en fonction du temps t
6. Établir les équations horaires du mouvement du centre d'inertie G du projectile : $x(t)$ et $z(t)$
7. Que peut-on déduire ?

Partie II : Équation de la trajectoire et les caractéristiques de la trajectoire : la flèche et la portée

Trouver l'équation de la trajectoire, c'est d'éliminer le paramètre temps t entre les deux équations horaires concernant $z(t)$ et $x(t)$; c'est trouver z en fonction de x : $z(x) = ?$

1. Montrer que l'équation de la trajectoire du projectile s'écrit sous la forme : $z(x) = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x + h_A$. conclure
2. Déterminer la portée (distance OP , sur le sol horizontal, séparant le point de départ O du projectile et son point de chute P sur ce sol, d'altitude $z_P = 0$)
3. On suppose que $h_A = 0$, Pour quelle valeur α' de l'angle α la portée est-elle maximale (la vitesse initiale conservant la même norme v_0)
4. La flèche correspond à l'altitude la plus élevée atteinte par le projectile (calculée à partir de l'altitude initiale z_0) . déterminer les coordonnées du sommet F puis déduire la flèche f atteinte par le projectile .
5. Pour quelle valeur α'' de l'angle α la flèche est-elle la plus importante (la vitesse initiale conservant la même norme v_0)

Partie III : Applications numériques

On donne : $h_A = 2,00 \text{ m}$; $\alpha = 45^\circ$; $d = OP = 23,12 \text{ m}$, , $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $x_B = 16 \text{ m}$

1. Déterminer l'expression de la vitesse initiale v_0 en fonction de h_A , α , d et g , puis calculer sa valeur
2. La boule a -t-elle dépassé l'obstacle d'altitude $H = 4,00 \text{ m}$ (voir figure 1) ? justifier votre réponse
3. Trouver l'instant t_p où la boule touche le sol au point P
4. Déterminer la norme de la vitesse v_p du centre d'inertie G de la boule au point P

Exercice 3 : Le lancer du poids

Le lancer du poids est une épreuve de l'athlétisme qui consiste à lancer une boule de métal, à la force des bras, le plus loin possible. Les records du monde sont actuellement détenus par Randy Barnes, chez les hommes, depuis 1990, avec une distance de 23,12 m et par Natalya Lisovskaya, chez les femmes, depuis 1987, avec un lancer à 22,63m.

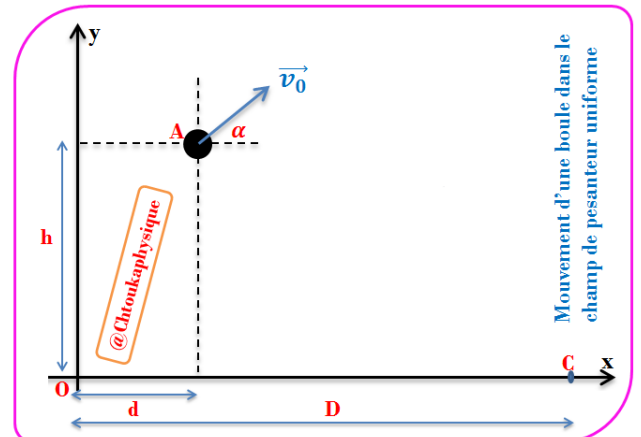
Une boule de masse m est lancée par Natalya Lisovskaya avec une vitesse initiale \vec{v}_0 inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale depuis une position $A (x_0, y_0)$ à l'instant $t = 0$ (voir la figure ci-dessous) ,

Pour simplifier les raisonnements, on ne travaillera que sur le centre d'inertie G de la boule et négligera la résistance de l'air .

Données :

$\alpha = 45^\circ$, $h = 2,22 \text{ m}$, $d = 0,5 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

1. Établir les équations horaires du mouvement de la boule dans le repère (O, x, y)
2. en déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire et donner sa nature
3. Établir, en fonction de D , g , d , α et h , la valeur v_0 de la vitesse initiale \vec{v}_0 que Natalya Lisovskaya a communiqué à la boule pour réussir le jet. Faire l'application numérique
4. Calculer la hauteur maximale (par rapport au sol) atteinte par la boule
5. La boule arrive au point C avec un vecteur vitesse \vec{v}_C
 - 5.1 Déterminer les coordonnées de \vec{v}_C
 - 5.2 En déduire la norme et la direction de \vec{v}_C



Exercice 4 : Mouvement plan

Partie I : Étude de la chute d'un corps avec frottement

À un instant choisi comme origine des dates ($t = 0$), on lâche, sans vitesse initiale d'un point H, un corps solide (A) de masse $m_A = 0,5 \text{ kg}$ et de centre d'inertie G_A (Figure).

En plus de son poids, le solide (A) est soumis à une force de frottement fluide $\vec{f} = -k \vec{v}_A$ où est le vecteur vitesse de G_A à un instant t et k une constante positive ($k > 0$).

- Montrer que l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la composante $v_{Ay}(t)$ selon l'axe (Oy) du vecteur vitesse $\vec{v}_A(t)$ s'écrit :

$$\frac{dv_{Ay}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_{Ay}(t) + g = 0 \quad \text{où } \tau \text{ représente le temps caractéristique du mouvement}$$

la courbe de la figure 2 représente l'évolution de $v_{Ay}(t)$ au cours du temps

- Déterminer τ et déduire la valeur de k
- Déterminer, en utilisant la méthode d'Euler, la vitesse $v_{Ay}(t_i)$ à un instant t_i sachant que l'accélération à l'instant t_{i-1} est : $a_{Ay}(t_{i-1}) = -4,089 \text{ m.s}^{-2}$ et que le pas de calcul est $\Delta t = 0,01 \text{ s}$

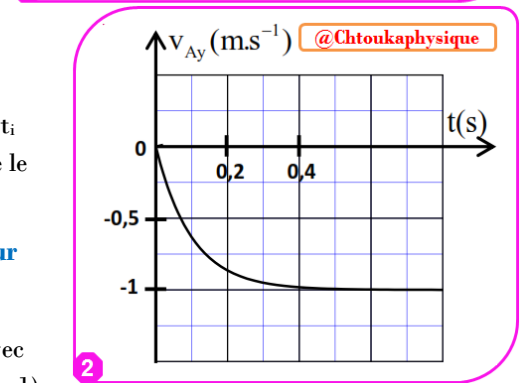
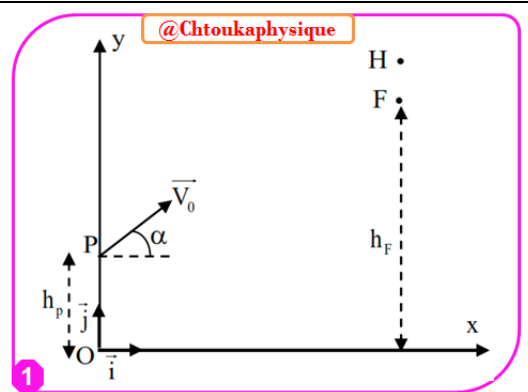
Partie II : Étude de la chute d'un projectile dans le champ de pesanteur

À l'instant où le centre d'inertie G_A du corps (A) passe par le point F d'altitude $h_F = 18,5 \text{ m}$ par rapport au sol, on lance un projectile (B) de masse m_B et de centre d'inertie G_B , d'un point P de coordonnées $(0, h_p)$ avec une vitesse initiale \vec{V}_0 faisant un angle α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) avec l'horizontale (fig 1).

On choisit cet instant comme nouvelle origine des dates ($t = 0$) pour le mouvement de (A) et celui de (B).

On néglige les frottements pour le projectile (B) et on donne $h_p = 1,8 \text{ m}$, $V_0 = 20 \text{ m.s}^{-1}$

- Établir les équations horaires $x_B(t)$ et $y_B(t)$ du mouvement de B en fonction de α et t
- Exprimer les coordonnées du point S, sommet de la trajectoire de (B), en fonction de α
- Les deux corps (A) et (B) se rencontrent au point S (on considère que G_A coïncide avec G_B en S). Déterminer l'angle α correspondant sachant que le corps (A) passe par F avec sa vitesse limite et que les mouvements de (A) et (B) s'effectuent dans le même plan (xoy)



Exercice 5 : Force de Lorentz

Compléter le tableau suivant : Déterminer la direction, le sens et l'intensité de la force \vec{F}_m

La direction et sens de \vec{F}_m	$q < 0$ \vec{v}	H^+ \vec{v}
L'expression de l'intensité F_m		
La direction et sens de \vec{F}_m	O^{2-} \vec{v}	H_e^{2+} \vec{v}
L'expression de l'intensité F_m		

Exercice 6 : Étude du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Deux particules chargées Li^+ et X^{2+} sont introduites en un point O, avec la même vitesse initiale \vec{v} , dans un espace où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} , perpendiculaire au vecteur vitesse \vec{v} ,

q_X et m_X sont respectivement la charge électrique et la masse de la particule X^{2+}

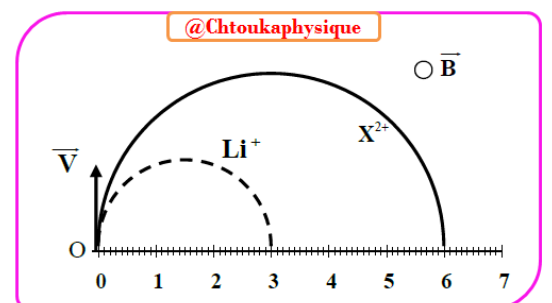
On considère que les deux particules Li^+ et X^{2+} sont soumises seulement à la force de Lorentz.

Données :

- La vitesse initiale : $V = 10^5 \text{ m.s}^{-1}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- L'intensité du champ magnétique : $B = 0,5 \text{ T}$;
- La masse de la particule Li^+ : $m(Li^+) = 6,015 \text{ u}$, $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$

La figure ci-contre représente les trajectoires des deux particules dans le champ magnétique \vec{B}

- Déterminer la direction, le sens et l'intensité du vecteur de Lorentz exercée sur la particule Li^+ au point O
- Préciser le sens du vecteur en le représentant par \odot s'il est dirigé vers l'avant ou par \otimes s'il est dirigé vers l'arrière.
- En appliquant la deuxième loi de Newton dans un référentiel galiléen, montrer que le mouvement de l'ion Li^+ est uniforme et de trajectoire circulaire de rayon $R_{Li} = \frac{m(Li^+) \cdot v}{e \cdot B}$
- En exploitant les données de la figure, déterminer le rapport $\frac{R(X^{2+})}{R(Li^+)}$, avec $R(X^{2+})$ le rayon de la trajectoire de X^{2+}



5. Sachant que la particule X^{2+} se trouve parmi les trois ions proposés avec leurs masses dans le tableau ci-dessous, identifier X^{2+} en justifiant la réponse

Ion	${}^{24}_{12}\text{Mg}^{2+}$	${}^{26}_{12}\text{Mg}^{2+}$	${}^{40}_{20}\text{Ca}^{2+}$
Masse en (u)	23,985	25,983	39,952

Exercice 7 : Détermination de la masse d'une particule chargée

Le but de cet exercice est de déterminer la masse d'une particule chargée en étudiant son mouvement dans un champ magnétique uniforme

Deux particules chargées He^{2+} et O^{2-} sont introduites en un point A, avec la même vitesse initiale \vec{v} , dans un espace où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} , perpendiculaire au vecteur vitesse \vec{v} ,

On considère que les deux particules He^{2+} et O^{2-} ne sont soumises qu'à la force de Lorentz.

Données :

- La masse de particule He^{2+} : $m(\text{He}^{2+}) = 6,68 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$

La figure ci-contre représente l'enregistrement des deux trajectoires des particules He^{2+} et O^{2-} dans le champ magnétique \vec{B}

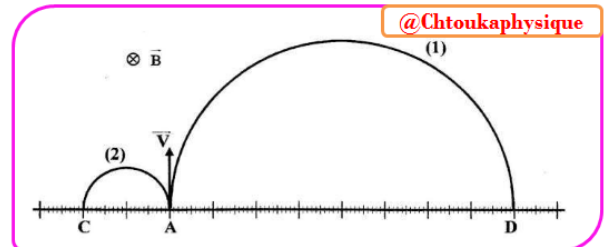
1. Identifier la trajectoire correspondante à chaque particule

2. En appliquant la deuxième loi de Newton dans un référentiel galiléen, montrer que le mouvement de l'ion He^{2+} est uniforme

et de trajectoire circulaire de rayon $R_{\text{He}^{2+}} = \frac{m(\text{He}^{2+}) \cdot v}{2 \cdot e \cdot B}$

3. En exploitant les données de la figure, déterminer le rapport $\frac{R(\text{O}^{2-})}{R(\text{He}^{2+})}$, avec $R(\text{O}^{2-})$ étant le rayon de la trajectoire de la particule O^{2-}

4. Montrer que la masse de la particule O^{2-} est $m(\text{O}^{2-}) = 2,67 \cdot 10^{-26} \text{ Kg}$



Exercice 8 : Spectrographe de masse

On se propose de déterminer le nombre de masse A (nombre de nucléon) de l'un des isotopes du potassium, élément chimique, mélange de deux types d'isotopes : ${}^{39}\text{K}^+$ et ${}^{\text{x}}\text{K}^+$

L'isotope ${}^{39}\text{K}^+$ est plus abondant.

On utilise alors un spectrographe de masse constitué essentiellement de trois compartiments.

Dans le premier compartiment, les atomes de potassium sont ionisés en cations (${}^{39}\text{K}^+$ et ${}^{\text{x}}\text{K}^+$) ; dans le deuxième compartiment, les ions sont accélérés, leurs vitesses initiales étant négligeables et dans le troisième compartiment, les ions sont soumis à l'action d'un champ magnétique ; en fin de course, ils atteignent un écran luminescent.

Données :

Le mouvement des particules a lieu dans le vide ; le poids d'un ion est négligeable devant la force électrique et la force magnétique.

La charge élémentaire est $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;

la tension U établie entre les plaques A et C a pour valeur $U = V_A - V_C = 1,0 \cdot 10^3 \text{ V}$;

l'intensité du champ magnétique régnant dans la zone 3 est $B = 100 \text{ mT}$;

la masse d'un ion ${}^{\text{A}}\text{X}^{a+}$ est $m({}^{\text{A}}\text{X}^{a+}) = A m_0$. m_0 représente la masse d'un nucléon avec $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$

la masse de l'ion ${}^{39}\text{K}^+$ est $m_1({}^{39}\text{K}^+)$, la masse de l'ion ${}^{\text{x}}\text{K}^+$ est $m_2({}^{\text{x}}\text{K}^+)$,

Entre les plaques A et C, les ions sont accélérés par un champ électrique uniforme. Leur vitesse au point T_1 de la plaque A est supposée nulle.

Au point T_2 , tous les ions de potassium ont la même énergie cinétique E_c avec $E_c = e \cdot U$

1. Trouver l'expression de la vitesse de chaque ion au point T_2 , en fonction de e , U , A et m_0

A partir de T_2 , les ions pénètrent dans la zone 3 avec des vitesses perpendiculaires à la plaque C. Chaque type d'isotope effectue, dans le plan de la figure, un mouvement circulaire uniforme.

2. En un point N de l'une des trajectoires, représenter sur la figure, la vitesse d'un ion potassium et la force magnétique (force de Lorentz) qui s'exerce sur cet ion

3. Compléter la figure en représentant le sens du champ magnétique régnant dans la zone 3.

4. Montrer que le rayon de la trajectoire des ions ${}^{39}\text{K}^+$ a pour expression $R_1 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{78 m_0 U}{e}}$, puis déduire, sans démonstration, l'expression du rayon R_2 de la trajectoire des isotopes ${}^{\text{x}}\text{K}^+$, que peut-on déduire ?

5. Calculer la valeur du rayon R_1 de la trajectoire des ions ${}^{39}\text{K}^+$.

Les deux types d'isotopes rencontrent l'écran luminescent en deux points d'impact I et I'

6. Montrer que le rapport des rayons des trajectoires des isotopes du potassium dans la zone 3 est : $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{39}{x}}$

7. La distance entre les points d'impact est $d = 2,5 \text{ cm}$. Déterminer la valeur du nombre de masse x (nombre de nucléons) de l'isotope ${}^{\text{x}}\text{K}^+$, sachant que $x > 39$

«Les hommes construisent trop de murs et pas assez de ponts...» Isaac Newton

