Exercice 2 (5 points)

Soient $\alpha, \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\alpha \geq \beta$. On considère l'équation suivante :

$$E_{(\alpha,\beta)} \; : \; z^2 - 2e^{i\alpha}z + e^{i2\alpha} + e^{i2\beta} = 0$$

Partie 1

1) a) Vérifier que le discriminent de $E_{(\alpha,\beta)}$ est : $\Delta = (i2e^{i\beta})^2$. .... 0,25 p

b) Résoudre Dans $\mathbb{C}$ l'équation : $E_{(\alpha,\beta)}$. .... 0,25 p

2) On considère l'équation suivante :

$$(E) \; : \; 2z^2 - 2(1 + i\sqrt{3})z - 1 + (2 + \sqrt{3})i = 0$$

a) Trouver α et β de $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\alpha \geq \beta$ pour que : $E_{(\alpha,\beta)} \Leftrightarrow (E)$ .... 0,75 p

b) Déduire les solutions de (E). .... 0,25 p

3) On considère les nombres complexes suivantes : $z_1 = e^{i\alpha} + ie^{i\beta}$, $z_2 = e^{i\alpha} - ie^{i\beta}$, $U = z_1 + z_2$ et $V = \frac{z_2}{z_1}$

a) Écrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle. .... 0,75 p

b) Écrire U et V sous la forme trigonométrique. .... 0,5 p

c) Trouver une relation entre α et β pour que $|U| = |V|$. .... 0,5 p

d) Montrer que : $|U| + |V| \leq 3$ si est seulement si $\beta = \alpha$ et que $\left|\sum_{k=0}^{2024} U^k\right| \leq 2^{2025} - 1$. 0,5 p

Partie 2

s le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(z_1)$ et $_2$). R_1 est la rotation de centre O et d'angle θ.

a) Montrer que $R(B) = A \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = \beta$ .... 0,25 p

b) Supposons maintenant que $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = \beta$.

Trouver z_3 l'affixe du point C tel que le quadrilatère $OBCA$ soit un losange. .... 0,25 p

On considère les points $E(e^{i\alpha} + e^{i\beta})$ et $F(e^{i\alpha} - e^{i\beta})$

a) Vérifier que $\frac{z_1 - z_E}{z_2 - z_E} \in i\mathbb{R}^*$ .... 0,25 p

b) Montrer que les points A, B, E et F sont cocycliques. .... 0,25 p

c) Existent elles des réels α et β pour que : .... 0,25 p

$$O = Bary\{(A; 1), (B; 3), (E; -1), (F; -1)\}$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر المعادلة : $(E) \ : 195x - 232y = 1$.

0,50 ن ① (أ) حدد $132 \wedge 195$.

0,50 ن (ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(163 + 232k ; 137 + 195k) \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$

0,25 ن (ج) أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0 \leq d \leq 232$ و $195d \equiv 1[232]$.

0,25 ن ② بين أن العدد 233 عدد أولي.

③ لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 . نعتبر التطبيق f من A نحو A
المعرف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{195} على 233.

نقبل أن : $a^{232} \equiv 1[233] \ : \ \forall a \in A \setminus \{0\}$.

0,50 ن (أ) بين أن لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن : $a = b$.

0,50 ن (ب) ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a) = b$. حدد a بدلالة b .

0,50 ن (ج) استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

Exercice 2

0.5 1) a) Par une intégration par partie calculer $\int_0^1 \arctan(x)\,dx$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \arctan\left(\frac{k}{n}\right)$ et $v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n} \arctan^2\left(\frac{k}{n}\right)$

1 Montrer que $\lim u_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$ et que $\lim v_n = 0$

0.25 2) a) Montrer que $(\forall t \geq 0)$: $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

0.5 b) En déduire que $(\forall x \in [0,+\infty[)$; $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

0.75 c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $w_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n}\arctan\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $u_n - \frac{v_n}{2} \leq \ln(w_n) \leq u_n$, puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

0,75 pt — Montrer que $(E,+,.)$ est un espace vectoriel réel dont on déterminera une base.

Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

partie A :

On tire au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne, et on considère la variable aléatoire X égale au nombre de boules noires tirées.

1 pt — **1 -** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0,5 pt — **2 -** Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

partie B :

On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

Etape 1 : On tire une boule de l'urne, on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.

Etape 2 : On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1.

Etape 3 : On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne qui contient alors 12 boules

après l'étape 2.

On considère les évènements suivants : N ńla boule tirée à l'étape 1 est noireż

R ńla boule tirée à l'étape 1 est rougeż

E ńtoutes les boules tirées à l'étape 3 sont noiresż

0,5 pt — **1 -** Montrer que : $p(E\cap N)=\dfrac{12}{55}$

0,5 pt — **2 -** Calculer $p(E)$

0,5 pt — **3 -** Calculer la probabilité de l'événement R sachant que E est réalisé.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges.

On extrait les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête lexpérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boule tirée .

0,25 pt **1 - a)** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X

0,5 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement $[X=1]$

0,5 pt **c)** Montrer que : $p[X=2]=\dfrac{5}{33}$

0,5 pt **d)** Calculer la probabilité de l'événement $[X=3]$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est : $E(x)=\dfrac{13}{11}$

0,75 pt **b)** Calculer $E(X^2)$, et en déduire la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.